

Mémoire de fin d'Etudes

Thème :

Essai sur l'allocation stratégique dynamique d'actifs

Présenté et soutenu par :

MARAOUI MSALMI Skander

Encadré par :

Mme. Dorra HMAIED

Etudiant(e) parrainé(e) par :

Banque Centrale de Tunisie

Dédicace

À la mémoire de mon cher et regretté père qui nous a quittés le 6 août 2016 à l'âge de 59 ans, Paix à son âme...

Remerciements

Je tiens à remercier ma mère, pour ce que j'ai pu devenir aujourd'hui, ma sœur pour être un modèle d'excellence académique dans notre petite famille, et ma promise pour son soutien inconditionnel et infailible durant toutes ces années.

Je tiens aussi à remercier particulièrement, la direction générale de la gestion des réserves et des marchés de la Banque Centrale de Tunisie en la personne de M. Bechir Trabelsi pour sa bienveillance et ses précieux conseils ainsi que pour sa disponibilité exceptionnelle et évidemment toute l'équipe des réserves pour leur engagement extraordinaire tant sur le plan professionnel qu'humain.

Je tiens aussi à remercier sincèrement M^{me} Dorra Hmaied pour son encadrement, son suivi rigoureux et ses qualités humaines formidables.

Et enfin, je tiens, à remercier tout le corps administratif et enseignant de l'Institut de Financement du Développement du Maghreb Arabe.

Table des matières

Table des matières	2
Liste des figures	4
Liste des tableaux	4
Introduction générale :	5
Chapitre Premier : De l'Allocation Stratégique d'Actifs	10
Introduction :	11
I. L'allocation Stratégique d'actifs : Définition et concepts	12
<i>I. 1. Le rôle de l'allocation stratégique d'actifs et le risque systémique</i> :.....	<i>12</i>
<i>I. 2. L'allocation stratégique versus l'allocation tactique d'actif</i> :.....	<i>13</i>
<i>I. 3. Importance de l'allocation stratégique d'actifs, revue de la littérature</i> :.....	<i>14</i>
II. Méthodes d'optimisation principales et construction de portefeuille :	15
<i>II. 1. L'optimisation Moyenne-Variance</i> :	<i>16</i>
<i>II. 2. L'optimisation Moyenne-Variance rééchantillonnée</i> :	<i>17</i>
<i>II. 3. Le modèle d'optimisation de Black-Litterman</i> :.....	<i>18</i>
III. Processus de l'allocation stratégique d'actifs dans le cadre de la gestion des réserves de la banque centrale de Tunisie (B.C.T.) :.....	20
<i>III. 1. Identification des engagements de l'établissement</i> :.....	<i>20</i>
III.1.1. Le risque de liquidité :	20
III.1.2. Segmentation des avoirs en devises par horizon d'investissement de la B.C.T. :	21
III.1.3. Le risque de change :	21
III.1.4. Segmentation des avoir par devises	22
<i>III. 2. Définition des objectifs de risque et de rendement ainsi que l'horizon de placement</i> :.....	<i>23</i>
III.2.1. Relation entre la VaR et la théorie d'utilité :	24
<i>III. 3. Sélection des classes d'actifs et formulation des anticipations du marché</i> :.....	<i>27</i>
III.3.1. La solution Workbench et les anticipations en Forward-looking des marchés :	28
<i>III. 4. Construction du portefeuille politique</i>	<i>29</i>
<i>III. 5. Analyse de scénarios, stress-testing et implémentation de l'Allocation stratégique d'Actifs</i> :	<i>30</i>
Conclusion :.....	31
Chapitre II : Cadre théorique de la « Value at Risk »	32
Introduction :	33
I. Présentation de la Value at Risk :	34
<i>I.1. Qu'est-ce que la Value at Risk ?</i>	<i>34</i>
<i>I.2. Limites majeurs de la VaR</i> :.....	<i>34</i>
<i>I.3. La VaR dans l'histoire</i> :	<i>35</i>
<i>I.4. Une mesure de risque cohérente ?</i>	<i>37</i>
II. Méthodologies pour le calcul de la Value at Risk :	38
II.1. L'approche paramétrique :	39
<i>II.1.1. La méthode de Variance-Covariance</i> :	<i>39</i>
<i>II.1.2. La contribution de l'approche RiskMetrics™</i> :	<i>43</i>
<i>II.1.3. Évaluation de l'approche</i> :.....	<i>44</i>
<i>II.1.4. Extensions</i> :.....	<i>44</i>

II.1.4.1. Les modèles d'approximation linéaire :.....	45
II.1.4.2. L'approximation de VaR en portefeuille selon l'approche Delta-Normal :	46
II.1.4.3. L'approche Delta-Gamma-(Thêta)- Normale :	49
II.2. La simulation historique :	55
II.2.1. Méthodologie de l'approche :	55
II.2.2. Limites de l'approche :	56
II.2.3. Extensions dans la littérature :.....	57
II.3. L'approche de simulation Monte-Carlo :	58
II.3.1. Description de la méthode :	59
II.3.2. Évaluation de l'approche :.....	60
II.3.3. Extensions dans la littérature :.....	60
Conclusion :.....	62
Chapitre III : Application empirique sur des titres à revenus fixes US	63
Introduction :	64
I. Présentation et analyse pré-estimation de l'échantillon :.....	65
I.1. Statistiques descriptives :.....	66
I.2. Le test de Jarque-Bera :.....	67
I.3. Stationnarité, racine unitaire et racine explosive	68
I.3.1. Notion de la stationnarité :.....	68
I.3.2. Test de la stationnarité.....	69
II. Estimation et actualisation de la volatilité :	72
II.1. Définition du processus :	72
II.2. Actualisation de la volatilité et le modèle ARCH (m) :.....	73
II.3. Le processus Moyenne Mobile Exponentielle (Exponentially Weighted Moving Average - EWMA) :	74
II.4. Le modèle GARCH (1,1) – (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) :	76
II.4.1. Estimation de la volatilité future et phénomène de retour à la moyenne :.....	77
II.4.2. Justification du recours au modèle GARCH :	78
II.5. Modèles Asymétriques :.....	79
II.5.1. Le modèle EGARCH (Exponential GARCH) :	79
II.5.2. Cas du modèle GJR-GARCH :.....	81
II.5.3. Cas du modèle Component GARCH asymétrique :.....	81
II.6. Méthodologie de spécification des modèles ARCH:	83
II.6.1. Autocorrélations, autocorrélations partielles et effet ARCH :	83
II.6.2. Spécification des modèles ARCH :	84
III. Calcul des VaRs-GARCH et prévision hors-échantillon :	87
III.1. Capacité prédictive des modèles de volatilité :	90
III.2. Approche Hybride Delta-Gamma – Nelson Siegel :.....	91
III.3. Approximation de Cornish-Fisher :.....	94
IV. Construction de portefeuille :	95
IV.1. Théorie des copules :.....	95
IV.1.1. Définition d'une copule:	96
IV.1.2. Théorème de Sklar :.....	96
IV.2. Modélisation de la copule bivariable de Student :.....	97
IV.3. Construction de la matrice des covariances dynamiques :.....	99
IV.5. Simulation Monte-Carlo sur portefeuille à composantes simulées:	99
IV.6. Stabilité des portefeuilles politique :.....	100
Conclusion :.....	105

Conclusion générale	107
Bibliographie	111

Liste des figures

Figure 1: Processus de l'allocation stratégique d'actifs	20
Figure 2: Comparaison Q-Q des résidus avec les lois normale et Student	86
Figure 3 : VaRs-EGARCH US 0-1 Y	89
Figure 4 : VaRs-EGARCH US 3-5 Y	90
Figure 5 : Evolution de la courbe des taux Spot US (02/2004 - 09/2017)	91
Figure 6 : Exemple d'une courbe ajustée via le modèle Nelson-Siegel	92
Figure 7 : Résultat d'estimation de l'évolution de la courbe des taux US	92
Figure 8 : VaR Delta-Gamma – Historique du benchmark US MBS	94
Figure 9: Distribution de la copule-t de US 0-1 Y/US Agency 1-3 Y	98
Figure 10: Distributions marginales et distribution jointe de la copule de Student	98
Figure 11: VaR-GARCH sur portefeuille à composantes simulées	100
Figure 12: Evolution de la composition du portefeuille 1 contraint	101
Figure 13: Evolution de la composition du portefeuille 1 non-contraint	102
Figure 14: Evolution de la composition du portefeuille 2 contraint	103
Figure 15: Evolution de la composition du portefeuille 2 non-contraint	104

Liste des tableaux

Tableau 1 : Récapitulatif des Benchmarks	65
Tableau 2: Durations des benchmarks	66
Tableau 3: Statistiques descriptives de l'échantillon	66
Tableau 4: Test de Dickey-Fuller augmenté	71
Tableau 5: Test de Philips-Perron	71
Tableau 6 : Test d'autocorrélation sérielle et effet ARCH	84
Tableau 7 : Spécification des modèles de volatilité	84
Tableau 8 : Résultats des estimations	85
Tableau 9 : Statistiques descriptives et test de normalité des résidus reconsidérés	86
Tableau 10 : Calcul de la VaR (95%) 1 mois de l'échantillon complet.	88
Tableau 11: Violations de la VaR Delta-Gamma - hybride	94
Tableau 12: Violations de la VaR Cornish-Fisher	95

Introduction générale :

Il est vrai que la théorie de choix de portefeuille, ou dans une perspective stratégique, d'allocation d'actifs, constitue un cadre théorique de référence depuis sa formalisation par Harry Markowitz (1952)¹. Toutefois, les hypothèses sur lesquelles elle repose ne sont pas exemptes de critiques, surtout dans l'état actuel des choses. En effet, la réalité des marchés financiers, plus connectés et plus volatils que jamais, font que le soubassement de cette théorie constitue désormais une restriction majeure à une allocation d'actifs, ou à un choix de portefeuille, qui répondent aux besoins des investisseurs, et qui restent au diapason de la réalité des marchés.

Force est de constater que, d'une part, les rendements historiques des actifs financiers ne constituent aucunement une bonne anticipation de leurs rendements futurs tel que stipulé implicitement par cette approche, et que d'autre part, les risques qui leurs sont sous-jacents sont dans une dynamique d'évolution perpétuelle. Un écart entre la théorie et le monde réel des praticiens dès lors se creuse.

En effet, c'est bien la stabilité politique et économique et leur cohérence qui constituent la base de l'édifice du monde financier. Or, l'environnement politique et économique n'est jamais statique. C'est pourquoi un suivi des plus rigoureux des conditions de marché actuelles et futures est indispensable afin de répondre au mieux aux objectifs assignés à une politique d'investissement donnée, et surtout, pour respecter les contraintes auxquelles elle pourrait être soumise.

Ce que nous avons par contre observé durant l'histoire récente des marchés financiers, c'est le recours indument justifié à la loi normale pour modéliser les paramètres de risque et de rendement ainsi que les relations qui régissent les différents actifs et marchés. Cela a eu de par l'histoire des conséquences désastreuses, dont la dernière en date, la crise de 2008. Ceci est dû à la sous-estimation des chocs extrêmes en termes, et de magnitude (importance de la variation des rendements), et de fréquence. Il apparaît que la volatilité des actifs financiers n'admet pas qu'un seul régime. Bien au contraire, elle exhibe ce qu'on appelle un phénomène de « *Volatility Clustering* » c'est à dire, des zones de concentration de régimes de volatilité. Ceci est dû aux spécificités des rendements des actifs financiers qui affichent une forte autocorrélation, ce qui aboutit à des événements extrêmes moins rares que prévus dans le cadre de la loi normale. En effet, dans un tel cadre, la mesure classique de volatilité perd toute sa significativité et une modélisation beaucoup plus rigoureuse s'impose. Une première réponse à cette problématique

¹ Markowitz H.M. (1952). *Portfolio Selection*. "The Journal of Finance" March, Vol. 7, pp. 77-91.

a été apportée par Engle (1982)² avec sa spécification autorégressive de la volatilité, en l'occurrence le modèle ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), puis a été généralisé par Bollerslev (1986)³ en proposant la spécification GARCH (General Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). Depuis, nombreux modèles ont été proposés dans la littérature pour affiner davantage ces modèles, en intégrant certains caractères propres aux rendements des actifs financiers, tels que l'asymétrie des réponses de la volatilité par rapport au signe des rendements observés, ou encore par rapport à la magnitude⁴ desdits rendements. Une première spécification dans ce sens a été proposée par Nelson (1991)⁵ avec son modèle EGARCH (Exponential GARCH) qui prend en considération les deux effets sus-cités. Parallèlement, à partir des années 1990, un intérêt croissant à ces modèles dans le cadre multivarié a été observé, avec notamment le modèle de Baba Engle Kraft Kroner (BEKK)⁶, le modèle CCC-GARCH⁷ (Constant Conditional Correlation - GARCH) de Bollerslev (1990), ou encore du fameux modèle DCC-GARCH (Dynamic Conditional Correlation - GARCH) proposé par Engle (2002)⁸. Toutefois, ces modèles ont l'inconvénient d'imposer le même modèle de volatilité à toutes les séries à modéliser. Or, la réalité des choses fait que, chaque processus est spécifié par un modèle qui lui est bien propre, et qui, lui-même, reste sujet à des recalibrages périodiques, voire même, à une invalidation postérieure si les séries financières l'imposent.

Depuis leur proposition, l'utilisation de ces modèles a gagné en popularité, notamment dans le pricing des options dans le cadre du modèle Black et Scholes (1973)⁹.

En effet, la première version de ce modèle émet l'hypothèse que la volatilité est constante. Hypothèse forte, et largement désapprouvée par les traders, puisqu'elle aboutit à de mauvais pricing des produits dérivés optionnels.

Ce que nous nous proposons dans le cadre de ce travail, c'est de recourir à ces modèles, tout d'abord, afin de pouvoir appréhender justement les volatilités des différentes classes d'actif qui

² Engle, Robert F. 1982. "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation." *Econometrica*. 50:4, pp. 987-1007.

³ Bollerslev, Tim. 1986. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity." *Journal of Econometrics*. April, 31:3, pp. 307-27.

⁴ Engle, Robert, Takatoshi Ito and Wen-Ling Lin. 1990. "Meteor Showers or Heat Waves? Heteroskedastic Intra-Daily Volatility in the Foreign Exchange Market." *Econometrica*. May, 58:3, pp. 525-42.

⁵ Nelson, Daniel B. 1991. "Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A New Approach." *Econometrica*. 59:2, pp. 347-70.

⁶ Baba, Y., R.F. Engle, D. Kraft, and K.Kroner [1990], Multivariate simultaneous generalized ARCH, unpublished manuscript, University of California, San Diego

⁷ Bollerslev, T. (1990), "Modeling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model," *Review of Economics and Statistics*, 72, 498-505.

⁸ Engle, R.F. (2002a), "Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate GARCH Models," *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 339-350.

⁹ F. Black and M Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 81 (1973), 637-654.

feront l'objet de cet essai. Et puis, dans un second temps, pour bénéficier de leur pouvoir prédictif, afin d'en profiter dans le cadre de développement des anticipations des marchés dans une optique en Forward-Looking pour l'allocation stratégique d'actifs. En outre, ceci devrait nous permettre de viser un cadre de construction de portefeuilles politiques plus performants et au diapason de la réalité des marchés. Par ailleurs, nous pensons que cette approche est plus à même que le cadre classique -qui repose sur l'hypothèse de normalité des rendements- à garder un monitoring effectif sur les portefeuilles détenus. En effet, l'objectif ultime de l'allocation stratégique des actifs est de confronter les objectifs et les contraintes de l'investisseur avec ses anticipations des conditions de marché à long-terme et d'y apporter les corrections nécessaires en temps opportun. Or le problème est le suivant, d'une part le changement, bien que momentané, des conditions de marché peut faire endurer au portefeuille investi des pertes considérables, bien que ces dernières peuvent, cependant, être largement résorbées au cours de l'horizon d'investissement de long-terme. Alors que d'autre part, les contraintes politiques du cadre d'investissement imposent un certain niveau de perte à ne pas dépasser sur un horizon bien défini qui est généralement évalué à la fin de la période comptable considérée. C'est ce qui apparaît comme étant une espèce de problème de cohérence intra-temporelle.

De ce fait, et suite à ces constatations, la problématique que nous nous proposons de traiter est la suivante :

L'introduction d'un cadre dynamique de suivi de risque et d'optimalité de portefeuille peut-il apporter, sur le plan pratique, une amélioration considérable au processus de l'allocation d'actifs tout en restant dans un cadre stratégique ?

Aux termes de ce travail nous espérons affirmer les 3 hypothèses suivantes :

- H1 : Le recours aux modèles GARCH apporterait une bonne appréciation de la volatilité réalisée des classes d'actifs étudiées, ainsi que des mouvements extrêmes de leurs rendements. (Pertinence des modèles et capacité d'ajustement).
- H2 : Les modèles GARCH améliorerait sensiblement les anticipations de volatilité des différentes classes d'actifs grâce aux pouvoirs prédictifs qui leurs sont attribués. (Capacité prédictive des modèles).

- H3 : La construction d'une matrice des covariances dynamique grâce à une spécification univariée des processus, couplée à une mesure supérieure de corrélation, apporterait une amélioration au cadre de construction de portefeuille classique.

Pour finir, l'apport visé de ce travail consiste dans un premier temps à appréhender correctement la volatilité afin de suivre le risque effectif auquel est exposé le portefeuille, tout en s'assurant que la méthodologie adoptée pour estimer les risques de mouvements extrêmes soit appropriée. Puis dans une phase intermédiaire, cette même méthodologie sera testée afin de statuer sur son pouvoir prédictif sur des horizons variés, ce qui permettra d'apporter une valeur ajoutée à l'optique en Forward-Looking adoptée. Enfin, et c'est le but ultime de cette approche, c'est de pouvoir construire, via la méthodologie adoptée, une matrice de covariances dynamique correctement estimée, ce qui permettrait d'avoir des portefeuilles politiques présentant des caractéristiques plus fidèles au profil recherché par l'investisseur. Bien d'autres avantages pourraient être tirés de cette méthodologie, notamment en ce qui concerne le suivi des performances qui adopte une logique bidimensionnelle basée sur le couple risque/rendement. Ce travail, loin d'être complet, pourrait par ailleurs ouvrir des portes à des perfectionnements ultérieurs et à des développements d'autres pistes d'amélioration.

Ceci dit, le contenu du présent travail se présente de la manière suivante :

Un premier chapitre a été consacré à l'introduction du cadre conceptuel de l'allocation stratégique d'actifs. Dans cette partie nous avons traité du rôle de l'allocation stratégique d'actifs dans le processus global d'investissement et de sa relation avec le risque systémique supporté par l'investisseur. Par la suite, nous avons présenté les différents paradigmes qui traitent de la phase d'optimisation de portefeuille. En dernier lieu, le cas de la banque centrale de Tunisie a été brièvement présenté pour pouvoir faire le rapprochement entre les différents aspects théoriques du sujet et l'application empirique que nous serons amenés à faire plus loin.

Puis, un second chapitre a été développé pour traiter de l'aspect probabiliste du risque extrême. Pour la clarté de l'exposé, nous avons choisi de faire un focus sur la *Value at Risk*. Les différentes familles de méthodes de son calcul ont été présentées, ainsi que certaines extensions apportées dans la littérature afin de remédier à certaines carences relevées dans son cadre théorique.

Enfin, dans un troisième chapitre, sur la base d'un échantillon de benchmarks de titres à revenus fixes libellés en USD, nous avons effectué une étude empirique sur une période qui s'étale de février 2004 à septembre 2017 en prenant en compte des observations mensuelles. Pour ce faire, nous avons eu recours à certains modèles dynamiques de volatilité conditionnelle. Nous avons testé la capacité d'ajustement de chaque modèle en ayant recours au calcul de la *Value at Risk*. Par la suite, nous avons introduit le concept de copule. Aux moyens de la copule de *Student*, nous avons pu construire une matrice de covariances dynamiques. Chemin faisant, et sur la base des données hors échantillon, nous avons pu effectuer un suivi de la composition dynamique du portefeuille optimal et de sa cohérence avec le cadre stratégique d'allocation d'actifs.

Chapitre Premier : De l'Allocation Stratégique d'Actifs

Introduction :

Dans ce chapitre liminaire, nous avons introduit le concept de l'allocation stratégique d'actifs, en anglais « *Strategic asset allocation* » et son rôle dans le processus global d'investissement, ainsi que son étroite relation avec le risque systémique auquel un investisseur ou une institution décide d'y être exposé pour un horizon temporel bien défini. Afin d'éviter toute équivoque, nous avons présenté brièvement l'allocation tactique d'actifs, par opposition à celle stratégique, en espérant ainsi avoir dissipé toute confusion possible. Puis, nous avons présenté les principaux travaux dans la littérature qui ont souligné l'importance du processus de l'allocation d'actifs. Ensuite, nous avons présenté les principales méthodes d'optimisation de portefeuille vu qu'il s'agit d'une phase cruciale dans ledit processus. D'autant que plus loin, nous avons eu recours à l'une d'elles. Enfin, nous avons abordé le processus d'allocations stratégique d'actifs dans le cadre de gestion des réserves de change de la banque centrale de Tunisie ainsi que l'amélioration significative qu'il a pu apporter. Dans cette dernière partie, nous avons essayé de rendre intelligible chaque étape dudit processus en faisant un bref focus sur la partie qui nous intéresse plus spécifiquement dans le présent travail, à savoir, le développement d'une vision en *forward-looking* des conditions de marché et la construction du portefeuille politique. Notons dès maintenant que, par rapport au cas présenté, le présent travail porte une attention spécifique sur la volatilité et les risques extrêmes étant donnée leur lien intime avec le risque auquel l'investisseur sera exposé durant son horizon d'investissement.

I. L'allocation Stratégique d'actifs : Définition et concepts

L'allocation stratégique d'actifs (ASA), de l'anglais « *strategic asset allocation* » est à la fois un processus et un résultat. En effet, il s'agit d'un élément inscrit dans la cadre de planification de gestion de portefeuille.

Pour définir l'ASA de la façon la plus complète et concise possible, il s'agit d'un processus qui confronte les objectifs d'un investisseur en termes de rendement, de tolérance de risque et d'autres contraintes avec sa vision de long-terme des conditions de marché. Ainsi, Le Sourd (2003)¹⁰ conçoit l'ASA en tant que l'allocation répartie sur les différentes classes d'actifs majeures en accordance avec les objectifs de long-terme de l'investisseur. Le résultat, et la finalité de ce processus, est de définir l'exposition optimale aux différentes classes d'actif. Ces dernières étant prévues dans la politique d'investissement préétablie.

L'ASA peut donc être vue comme étant un processus avec des étapes bien articulées qui débouchent sur une assignation des poids de chaque classe d'actif dans un portefeuille. Dans ce cas, le processus, ainsi que le résultat, sont appelés allocation stratégique d'actifs. Ainsi, Sharpe (1992)¹¹ définit l'ASA comme étant le processus qui consiste à ventiler le portefeuille entre les différentes classes d'actifs.

L'allocation stratégique d'actifs est donc le premier élément du processus de gestion de portefeuille qui se focalise sur la sélection des composantes majeures d'un portefeuille. C'est donc le point de départ de construction de portefeuille. Ce point est crucial puisque, tous les choix postérieurs sont tributaires de cette phase. Et c'est pourquoi la plus grande attention doit être portée sur cette phase de construction.

I. 1. Le rôle de l'allocation stratégique d'actifs et le risque systémique :

Comme étalé plus haut, l'allocation stratégique d'actifs joue un rôle majeur en alignant le profil de risque de portefeuille avec les objectifs de l'investisseur.

¹⁰ Amenc N., Le Sourd V. (2003): *Portfolio Theory and Performance Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester.

¹¹ Sharpe W. (1992): *Asset Allocation: Management Style and Performance Measurement*. "Journal of Portfolio Management", Vol. 18, No. 2.

Par ailleurs, une pierre angulaire dans la théorie financière, telle que développée par Sharp (1964)¹², est que les marchés ne rémunèrent que le risque systémique supporté par un investisseur. En d'autres termes, les risques diversifiables ne sont pas rémunérés. De ce fait, un investisseur devrait espérer une rémunération de long-terme basé seulement sur ce risque. En effet, un tel risque est inhérent à l'activité économique sur la sphère réelle (cycle économique, inflation...). Chemin faisant, une classe d'actif relativement homogène devrait refléter une exposition donnée à ces facteurs de risque systémique. Dès lors, le rôle économique de l'allocation stratégique est d'exprimer le degré d'exposition qu'un investisseur souhaiterait avoir sur certains facteurs de risque systémique. L'implémentation de l'ASA est donc une approche « disciplinée » qui permet la spécification et le contrôle des différentes expositions à ces facteurs de risque.

I. 2. L'allocation stratégique versus l'allocation tactique d'actif :

Nous disions plus haut que l'ASA définit l'exposition de long-terme souhaitée d'un investisseur aux différents facteurs de risque systémique. C'est donc une optique de long-terme qu'il faut adopter lors de la considération du rôle de l'ASA. Par ailleurs, Idzorek (2006)¹³, en autres, avance que, l'ASA pourrait être revue périodiquement et peut-être révisée à la lumière des opportunités présentes sur le marché, ou encore si les fourchettes fixées en termes de composition, de risque, ou de rendement viennent à s'écarter des objectifs préalablement assignés. Toutefois, il arrive que la performance relative des classes d'actif considérées dans l'ASA puisse varier à court-terme. Pour en profiter, et sans pour autant réviser le cadre stratégique, un investisseur pourrait envisager des ajustements de courtes périodes par rapport au cadre défini par l'ASA. Ceci est tout à fait orthodoxe du point de vue de l'usage, et tout à fait légitime du point de vue d'un investisseur rationnel visant à maximiser son utilité. Néanmoins, ce n'est aucunement le rôle de l'ASA. En effet, c'est le rôle de l'allocation tactique d'actif (ATA). Ces ajustements peuvent être, seulement occasionnels ou encore *ad hoc*, ou fréquent basés sur des modèles d'évaluation et de prévision. En pratique, l'ATA se réfère à la discipline d'investissement basée sur des ajustements de court-terme des proportions assignées aux différentes classes d'actif par l'ASA. En adoptant une ATA, et en prenant comme

¹² Sharpe, William F., et al. [1964]. "Capital Asset Prices: A Theory Of Market Equilibrium Under Conditions Of Risk," *Journal of Finance* 19 (3): 425-442.

¹³ Idzorek T. (2006): Developing Robust Asset Allocations. Working paper. "Ibbotson Research Paper" 18 April.

point de repère le portefeuille investi passivement dans des indices qui reflètent les caractéristiques des classes d'actif choisies, un investisseur espère tirer un profit net (des dépenses) des déviations par rapport au portefeuille benchmark de l'ASA, appelé aussi le portefeuille politique (politique d'investissement).

L'allocation tactique d'actif est donc une stratégie active d'investissement qui est basée sur le sentiment de marché, et certains facteurs techniques dans une optique de court à moyen-terme ; contrairement à l'ASA qui, adopte une optique de Forward-Looking en prenant comme inputs les rendements, les volatilités et les corrélations.

l. 3. Importance de l'allocation stratégique d'actifs, revue de la littérature :

Vue l'importance accordée à l'allocation stratégique d'actifs, des études empiriques ont été effectuées afin de donner une idée quantifiée sur la capacité explicative de ce processus. Brinson et al (1986)¹⁴, ont conduit une recherche sur l'importance de l'allocation d'actifs en l'interprétant comme la fraction de la variation des rendements durant le temps attribuable à cette dernière. Ils ont conclu que l'allocation d'actifs expliquerait en moyenne 93,6% de la variation des rendements dans le temps pour 91 plans de pension US pour la période entre 1974 et 1983. Cette moyenne décrit un intervalle s'étalant de 75,5% à 98,6%. La proportion résiduelle serait attribuable, toujours selon les mêmes auteurs, au timing et à la sélection des titres. Singer et Beebower (1991)¹⁵ ont mis à jour la moyenne de cette capacité explicative, en se basant sur un échantillon allant de 1977 à 1987 à 91,5%.

Blake et al (1999)¹⁶ ont conduit cette étude sur plus de 300 plans de pension UK pour la période s'étalant de 1986 à 1994 et ont conclu que l'allocation d'actifs est responsable de près de 99,5% de la variation du rendement global. Ibbotson et Kaplan (2000)¹⁷, en utilisant des données de 1988 à 1998 relatives à 94 fonds mutuels US, ont trouvé que les différences dans les allocations d'actif entre ces fonds expliqueraient 40% des différences entre leurs rendements respectifs. Ceci prouverait, qu'en pratique, les investisseurs se différencient de leurs pairs via l'allocation d'actifs. Par contraste, Kritzman et

¹⁴ Brinson, Gary P., L. Randolph Hood, and Gilbert L. Beebower, "Determinants of Portfolio Performance," *Financial Analysts Journal*, July-August 1986, pp. 39-44.

¹⁵ Brinson, Gary P., Brian D. Singer, and Gilbert L. Beebower, 1991. *Determinants of Portfolio Performance II: An Update*. *Financial Analysts Journal* 47(3):40-8.

¹⁶ Blake, D., Lehmann, B., Timmerman, A. (1999), *Asset Allocation Dynamics and Pension Fund Performance*, *Journal of Business*, Vol. 72, pp. 429-61.

¹⁷ Ibbotson, Roger G., Paul D. Kaplan. 2000. "Does Asset Allocation Policy Explain 40, 90, or 100 Percent of Performance ?" *Financial Analysts Journal*, vol. 56, no. 1 (January/February):26-33

Page (2003)¹⁸ en se posant la question de savoir, si les investisseurs sont compétents, devraient-ils privilégier une focalisation sur l'allocation d'actifs ou la sélection des titres ? Ils ont trouvé qu'une focalisation sur la sélection active des titres déboucherait potentiellement sur une plus grande dispersion de la richesse finale. Ceci est moins exprimé en variant l'allocation d'actifs. Ils ont conclu alors que les investisseurs compétents ont le potentiel de gagner un rendement incrémental supérieur via la sélection des titres qu'à travers l'allocation d'actifs. Toutefois, ce potentiel de rendement supérieur est naturellement accompagné par un niveau de risque plus élevé, ce qui met l'accent sur la nécessité de considérer l'aversion au risque de l'investisseur en plus de ses compétences de sélection. Il est donc à noter que, selon Sharpe (1991)¹⁹, agrégés, la somme des investisseurs fait le marché, et puisque les coûts de transactions (inhérents à un style de gestion actif) ne se compensent pas entre ces derniers, en moyenne, et après déduction des coûts, le rendement d'une stratégie de gestion active devrait être moindre que celui d'une gestion passive.

II. Méthodes d'optimisation principales et construction de portefeuille :

Une phase cruciale dans le processus de l'ASA est la conversion des différents inputs en une recommandation d'allocation. En d'autres termes, en une composition spécifique de portefeuille. Une spécificité des investisseurs institutionnels est que cette phase repose sur des concepts quantitatifs, en l'occurrence, les dernières avancées dans la théorie moderne de portefeuille. Certes, le jugement des praticiens reste prépondérant dans cette optique, mais le soubassement de l'approche reste procédural et bien méthodique.

¹⁸ Kritzman Mark and Sébastien Page. "The Hierarchy of Investment Choice," *Journal of Portfolio Management*, Vol.29, Iss.4 Summer 2003, 11-23.

¹⁹ William F. **Sharpe**, *The Arithmetic of Active Management*, *Financial Analysts Journal*, January/February **1991**, Vol. 47, No. 1: 7-9.

II. 1. L'optimisation Moyenne-Variance :

Développée par Markowitz (1952, 1959)²⁰, cette méthode maximise le rendement espéré pour un niveau de risque donné, ou inversement minimise le niveau de risque, pour un rendement espéré donné. Chemin faisant, une frontière dite efficiente est construite, sur laquelle, résident tous les portefeuilles optimaux, ainsi que le portefeuille optimal à risque minimal. L'hypothèse la plus importante dans ce cadre classique d'optimisation moyenne-variance est que le processus des rendements doit suivre une loi normale. En effet, c'est loin d'être le cas en réalité. Par ailleurs, en ignorant les moments supérieurs de la loi de génération des rendements aléatoires, en l'occurrence, la Skewness et la Kurtosis, cette démarche peut déboucher sur des compositions de portefeuilles plus risqués.²¹ En outre, selon Best et Grauer (1991)²², cette approche s'avère très sensible à l'estimation des inputs, à savoir, les rendements, les volatilités ainsi que les corrélations. Ceci, toujours selon ces auteurs, aboutit à des portefeuilles concentrés sur un nombre restreint de classes d'actifs. Mais le plus important est que certaines classes d'actifs, des plus importantes des fois, sont quasiment exclues. Ceci va à l'encontre du concept de diversification, pierre angulaire de la finance moderne. De plus, les investisseurs sont généralement dans une optique multi-périodique, alors que le cadre classique de moyenne-variance reste dans un cadre mono-périodique. Ceci veut dire qu'un portefeuille optimal pour une période peut devenir sous-optimal pour la période suivante. Enfin, l'hypothèse de normalité des rendements fait que cette approche ne capture pas correctement le risque, aussi bien de façon absolue (une classe d'actif donnée par exemple), que relative puisque, comme nous l'étalerons plus loin, deux actifs ayant la même volatilité peuvent avoir des risques différents.

²⁰ Markowitz H.M. (1952). *Portfolio Selection*. "The Journal of Finance" March, Vol. 7, pp. 77-91.
Markowitz H.M. (1959): *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Wiley, New York.

²¹ Nous nous intéresserons de plus près à cette question dans les chapitres suivants.

²² Best M.J., Grauer R.R. (1991): On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results. "The Review of Financial Studies" January, Vol. 4, No. 2, pp. 315-342.

II. 2. L'optimisation Moyenne-Variance rééchantillonnée :

Cette approche d'optimisation a été développée par Michaud (1998)²³. Elle consiste à générer des frontières efficientes via la simulation Monte Carlo. Elle est basée sur la simulation en utilisant le cadre classique moyenne-variance en ayant recours aux données des rendements historiques. Ainsi, elle combine les moyennes, variances et covariances historiques aux prévisions de marché afin de représenter les attentes de l'investisseur. À chaque pas de simulation, les portefeuilles optimaux sont choisis pour un niveau de risque donné, ou encore pour un niveau de rendement donné. Une moyenne des pondérations de ces portefeuilles optimaux est calculée. Au final, une frontière efficiente rééchantillonnée est obtenue. Pour chaque niveau de rendement, le portefeuille le plus efficient est le centre (moyenne) de la distribution des tirages obtenus de la simulation. Une telle frontière tend à être plus diversifiée et plus stable dans le temps.

Cette approche présente 2 avantages considérables par rapport au cadre classique de l'optimisation moyenne-variance. Tout d'abord, suite à l'utilisation d'un processus centré en moyenne, la frontière efficiente obtenue est plus stable. En effet, de petits changements dans les inputs ne provoquent que de changements mineurs de la frontière efficiente. Ceci résulte naturellement sur des portefeuilles plus stables. En recourant à cette technique, un gestionnaire de portefeuille est à même de juger sur l'opportunité effective de faire un rééquilibrage de portefeuille. En effet, la plupart, si ce n'est toutes les classes d'actifs, sont représentées dans la frontière efficiente obtenue grâce à cette technique.

Toutefois, cette approche n'est pas exempte de critiques, telles que formulées par Scherer (2002)²⁴. Cette technique présente l'inconvénient de manquer d'un soubassement théorique solide. En effet, il n'existe aucune base théorique qui supporterait le fait qu'un portefeuille optimal ainsi construit présenterait une performance supérieure à un portefeuille construit suivant l'approche moyenne-variance classique. Par ailleurs, la pertinence des fréquences de rendements historiques par rapport aux valeurs observées sur le marché et aux valeurs d'équilibre est aussi questionnable.

²³ Michaud R.O. (1998): *Efficient Asset Management*. Harvard Business School Press, Boston.

²⁴ Scherer, B. (2002) *Portfolio Resampling: Review and Critique*, *Financial Analysts Journal*, Vol. 58, No. 6, pp. 98-109

II. 3. Le modèle d'optimisation de Black-Litterman :

Ce modèle a été développé par Black et Litterman (1992)²⁵ pour remédier au problème de l'erreur d'estimation, en l'occurrence, celle des rendements. Deux versions de ce modèle existent. La version contrainte et la version non contrainte.

- Le modèle Black-Litterman non contraint : En se basant sur les pondérations des classes d'actifs d'un benchmark donné (le portefeuille du marché selon les auteurs) en tant que point de départ neutre, les pondérations sont ajustées afin de refléter le point de vue de l'investisseur sur les rendements espérés. Ceci est effectué en se basant sur des techniques bayésiennes qui prennent en compte la vision de l'investisseur. Cette approche est appelée non contrainte du fait qu'elle permette aux pondérations des classes d'actifs d'être négatives.
- Le modèle Black-Litterman contraint : Par contraste au premier, ce modèle impose la contrainte de positivité sur les pondérations des classes d'actifs. Pour ce faire, la même démarche que le modèle non contraint est suivie. Toutefois, après avoir déterminé les rendements d'équilibre basés sur le MEDAF²⁶ (la distribution a priori), les anticipations –subjectives– de l'investisseur sont intégrées pour produire une estimation des rendements espérés (distribution a posteriori). Ces rendements anticipés ajustés sont alors utilisés dans une optimisation moyenne-variance avec une contrainte sur les positions à découvert.

Cette démarche fournit généralement des pondérations légèrement différentes de ceux du benchmark afin de refléter les anticipations de l'investisseur quant aux rendements espérés.

L'avantage de ce modèle est qu'il résulte sur des allocations bien diversifiées, tout en incorporant le point de vue prévisionnel de l'investisseur, ainsi que le degré de confiance dans ledit point de vue.

En créant des portefeuilles beaucoup plus stables, ce modèle pallie au problème de la sensibilité des pondérations des portefeuilles par rapport aux rendements espérés, évitant ainsi des coûts

²⁵ Black F., Litterman R. (1992): Global Portfolio Optimization. "Financial Analysts Journal" September/October, Vol. 48, No. 5, pp. 28-43.

²⁶ Sharpe, William F. (1964). *Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*, Journal of Finance, 19 (3), 425-442

de transaction conséquents inhérent au rééquilibrage des positions. En effet, ce problème est une insuffisance majeure du cadre classique de l'optimisation moyenne-variance.

Tableau récapitulatif des méthodes d'optimisation de portefeuille

	Portefeuille efficient	Diversification	Limites
MV	Un point unique sur la frontière efficiente reflétant le niveau de risque accepté.	Faible avec des portefeuilles très concentrés.	Très sensible aux inputs, monopériodique, basée sur l'information historique, mauvaise estimation du risque.
MVR	Un portefeuille sur la frontière rééchantillonnée.	Basée sur la moyenne de la simulation.	Sans fondement théorique, basée sur la fréquence historique des rendements ce qui sous-estime le risque.
BL	Un portefeuille se situant sur une frontière depuis un mix entre les rendements d'équilibre de marché et la vision de l'investisseur.	Intuitive avec une diversification satisfaisante (celle du marché).	Basée sur la théorie du MEDAF, subjectivité de l'investisseur peut sous-estimer le risque.

Nous avons vu que ces principales méthodes d'optimisation se focalisent entièrement sur le vecteur des rendements espérés. Or, tel qu'indiqué par Litterman et Winkelmann (1998)²⁷, cette approche n'est pas des meilleures, puisque les covariances historiques admettent également des erreurs d'estimation, ainsi que des événements propres à la période à partir de laquelle l'échantillon est choisi. Dans cette étude ils ont proposé différentes pistes pour estimer la matrice des covariances des rendements.

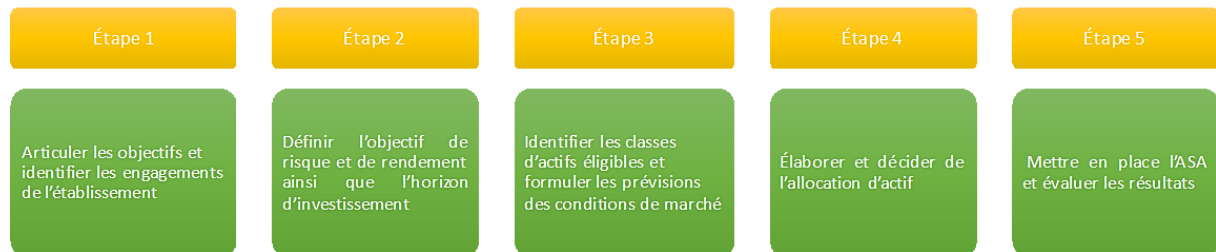
Plus concrètement, Qian et Gorman (2001)²⁸ ont proposé une extension du modèle Black-Litterman qui permettrait à l'investisseur d'exprimer son point de vue sur les volatilités des classes d'actifs, ainsi que les relations (corrélations) qui les régissent. Ainsi, ils ont pu dériver une estimation conditionnelle de la matrice des covariances des rendements. Ils ont enfin affirmé que la matrice des covariances conditionnelle, ainsi construite, stabiliserait davantage les résultats de la méthode moyenne-variance.

²⁷ Litterman, R. and Winkelmann, K. (1998). "Estimating Covariance Matrices." Risk Management Series, Goldman Sachs & Company, January.

²⁸ Qian, Edward and Gorman, Stephen (2001). "Conditional Distribution in Portfolio Theory", Financial Analysts Journal, September, 2001.

III. Processus de l'allocation stratégique d'actifs dans le cadre de la gestion des réserves de la banque centrale de Tunisie (B.C.T.) :

Figure 1: Processus de l'allocation stratégique d'actifs



III. 1. Identification des engagements de l'établissement :

Dans cette première étape les engagements de l'institution doivent être formulés. La mission des réserves étant généralement de faire face aux engagements économiques d'un pays et du service de sa dette extérieure, l'élément contractuel fait défaut contrairement aux banques commerciales ou aux fonds de pension. C'est pourquoi la réponse à cette problématique doit naturellement être abordée d'une façon différente.

Deux risques majeurs sont à considérer dans cette phase, en l'occurrence, le risque de change et le risque de liquidité.

III.1.1. Le risque de liquidité :

La liquidité pour les réserves de change est un élément crucial. En effet, bien qu'elles puissent être détenues pour des motifs différents en termes de priorité selon le pays, elles ont la mission majeure de faire face aux différents engagements libellés en monnaies étrangères, que cela soit selon un échéancier connu ou inconnu.

Pour gérer ce risque, une des stratégies consiste à créer des sous-portefeuilles ajustés selon la composition en devise ainsi que la stratégie d'investissement. Cette segmentation est basée sur des facteurs tels que :

- L'évolution des paramètres de la balance commerciale.
- L'échéancier de service de la dette extérieure.
- Les contraintes opérationnelles et institutionnelles.
- Les horizons d'investissement...

Les réserves sont généralement scindées en 2, voire, 3 sous-portefeuilles, afin de répondre au mieux aux contraintes de liquidité, sans pour autant omettre l'objectif de préservation de valeur

au fil du temps (un objectif de rendement en termes nominal ou réel). Naturellement, la relation entre la liquidité et le rendement est inverse, ainsi, la plus haute précaution doit être observée afin de concilier les 2 objectifs sans en compromettre l'un aux dépens de l'autre.

III.1.2. Segmentation des avoirs en devises par horizon d'investissement de la B.C.T. :

La segmentation ou « *Tranching* », est le fait de répartir les avoirs en devises de manière optimale dans le respect des principes généraux de gestion des réserves, à savoir, obtenir le meilleur rendement possible, sous la contrainte de la liquidité des fonds.

Conformément à la Politique d'investissement les avoirs en devises sont segmentés en trois tranches : le Fonds de roulement, la tranche de liquidité et la tranche d'investissement.

- **Le Fonds de roulement** est destiné à répondre aux dépenses au cours du mois. Il fait l'objet d'un rééquilibrage mensuel au début de chaque mois en vue de ramener sa taille à l'intérieur de la fourchette objectif.

Ainsi, et au cours du mois, la taille de cette tranche peut varier en dehors de la fourchette-objectif. Il est même tolérable que l'enveloppe assignée au FR soit consommée sur le mois au fur et à mesure des dépenses en devises.

- **La Tranche de liquidité** est destinée à faire face aux besoins de liquidité au titre d'une année, y compris le service de la dette publique extérieure.

De ce fait, elle est renflouée, en règle générale, au début de chaque année en fonction de l'allocation stratégique des actifs, afin de ramener sa taille à l'intérieur de la fourchette-objectif. Par la suite, sa taille devrait graduellement diminuer, voire, être entièrement consommée dans le cas extrême.

- **La Tranche d'investissement** est constituée par le reliquat des réserves après déduction du Fonds de roulement et de la tranche de liquidité et est en général destinée renflouer cette dernière au début de chaque année en fonction des besoins en liquidités.

Les coupons de la tranche d'investissement sont prélevés, par anticipation, à partir de la tranche de liquidité sur une base semestrielle. A l'encaissement, ils sont automatiquement transférés à la Tranche de liquidité.

III.1.3. Le risque de change :

Que le mode de gestion des fonds adopte une stratégie passive ou active, tant que les investissements sont libellés en monnaies étrangères, l'investisseur subit un risque de change

d'une façon permanente. La volatilité de la valeur des actifs investis à l'international en monnaie locale est due (principalement) à la fluctuation de la parité devise/monnaie locale. Ce risque augmente d'une façon non linéaire si un investisseur omet de considérer le risque devise/devise tout en tenant une exposition multidevise non couverte.

Dans le cadre de gestion des réserves, le risque de change est considéré en prenant en compte les paramètres suivants :

- La monnaie d'intervention sur le marché de change.
- La composition en devise des engagements bilanciaux.
- Le remboursement de la dette publique à court-terme.
- La composition en devise des imports...

Pour se prémunir contre les mouvements adverses des taux de change, l'investisseur devrait diversifier son exposition aux différentes devises principales, en l'occurrence, le USD, le EUR, le GBP et le JPY, tout en prenant en considération les caractéristiques de ses flux entrant et sortant pour chaque devise. Ainsi, grâce à un certain matching des cashflows, le risque de change devise/devise est ramené à son minimum raisonnable. En effet, une dépréciation de l'une d'elles tend à être associée à une appréciation des autres. De ce fait, un tel portefeuille multidevise est donc plus immunisé contre le risque de change.

III.1.4. Segmentation des avoir par devises

Les répartitions des tranches par devise de la B.C.T. sont déduites de la répartition globale tenant compte des éléments suivants :

- **Le Fonds de roulement** étant essentiellement destiné à couvrir les besoins règlement émanant des banques, sa composition doit répliquer celle de la balance générale des dépenses.
- **La Tranche de liquidité** est un portefeuille tampon qui sert à financer le Fonds de roulement, ce qui signifie que ces deux tranches doivent avoir la même composition par devise.
- **La Tranche d'investissement**, quant à elle, sa répartition par devise est la résultante de la composition globale par devise après déduction de celles du Fonds de roulement et de la Tranche de liquidité.

Cette démarche structurée et très méthodique de gestion a permis, entre autres, d'avoir une vision plus claire quant aux opportunités d'allocation, aussi bien en termes de maturités de placement, qu'en termes d'instruments d'investissement, désormais à même d'être intégrés dans l'univers des classes d'actifs éligibles.

En effet, des gains significatifs ont été enregistrés grâce au nouveau cadre de gestion des réserves²⁹. Par ailleurs, la segmentation des avoirs a permis de répartir les réserves en tranches et de dégager une part importante destinée à être investie dans le portefeuille titres à plus d'un an, dont la part a atteint en moyenne depuis 2012 près de 60% contre un niveau maximum observé de 20% selon l'ancien cadre.

En outre, l'amélioration du rendement des réserves est également imputable à l'élargissement considérable de la liste des émetteurs éligibles, à travers l'introduction des émissions des agences gouvernementales et supranationales qui offrent des pick-up de rendement significatifs. Il est à noter que cet élargissement n'aurait pas été possible sans une ingénierie adéquate. Une vision désormais claire permet d'apprécier correctement la capacité des différents portefeuilles à faire face aux pressions multiples en termes de liquidité que les réserves subissent depuis 2011.

III. 2. Définition des objectifs de risque et de rendement ainsi que l'horizon de placement :

Dans la seconde étape il est primordial de différencier entre la capacité de supporter un risque et la volonté d'y être exposé. La première étant sujette à des facteurs macroéconomiques, la seconde se rapporte plutôt à l'organe de décision.

La capacité devrait être évaluée selon des critères objectifs tels que :

- Le niveau de risque approprié qui permettrait d'atteindre les objectifs de long-terme,
- L'adéquation des réserves et de leur niveau,
- Les contraintes d'ordre opérationnel, notamment, les compétences effectives du capital humain.

La volonté étant plutôt d'ordre plus ou moins subjectif est régie par :

- Des biais cognitifs tels qu'énuméré par le paradigme comportemental de la finance,
- La mauvaise compréhension due à un illettrisme en matière d'investissement...
- Une aversion excessive au risque ce qui aboutit à d'important coûts d'opportunité...

²⁹ Pour d'amples informations sur ce sujet, cf. les rapports annuels de la banque centrale.

3 familles de mesures de risque sont généralement admises dans les titres à revenus fixes :

Déterministes	Probabilistes	Subjectives
-La duration de Macaulay ; -La duration modifiée ; -La duration effective ; -La « Key rate duration » ; -La convexité ; -La PV01 ; -La « Spread Duration » ; -La Key rate Spread Duration	-La « Shortfall Probability » ; -La « Value at Risk » (VaR) ; -La « Value at Risk conditionnelle » (CVaR ou encore « Expected Shortfall ») ; -La « Tracking Error ».	-La théorie de l'utilité ; -La théorie de la dominance stochastique (extension de la première).

III.2.1. Relation entre la VaR et la théorie d'utilité :

Le risque est un concept multidimensionnel qui fait intervenir la probabilité cumulative, ce qui permet de capter l'information contenue dans les moments d'ordre supérieur à 2. En effet, ce paradigme a permis de développer des mesures de risque plus adéquates et plus satisfaisantes que l'écart-type. Rappelons que la variance, et corrélativement, l'écart-type qui est sa racine carrée, n'est pas le risque, mais plutôt un proxy parmi tant d'autres qui essaient de nous donner une appréciation du phénomène du risque. La VaR, par contre, fait appel à la probabilité cumulative, et fait donc partie, des mesures qui vont au-delà de la simple approximation de dispersion autour de la moyenne, appelées des mesures de « Downside risk ». Ces dites mesures prennent en compte les moments supérieurs d'une distribution de probabilité donnée, qui sont autant de dimensions additionnelles de risque ayant un riche contenu informationnel.

En effet, nous pouvons rendre compte de ce phénomène en recourant au développement limité, autrement dit, aux séries de Taylor. Posons une fonction d'utilité de rendement de portefeuille noté $U(R_p)$.

$$dU \approx \frac{\partial U}{\partial R_p} dR_p + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial^2 R_p} dR_p^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial^3 R_p} dR_p^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n U}{\partial^n R_p} dR_p^n$$

Cette fonction peut-être reformulée en tenant compte de $\overline{R_p}$ ainsi :

$$U(R_p) \approx U(\overline{R_p}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n U}{\partial^n R_p} (R_p - \overline{R_p})^n$$

En faisant intervenir l'opérateur espérance, cette expression devient :

$$\begin{aligned} E(U(R_p)) &\approx U(\overline{R_p}) + \frac{1}{2!} U'' E((R_p - \overline{R_p})^2) + \frac{1}{3!} U''' E((R_p - \overline{R_p})^3) \\ &+ \frac{1}{4!} U'''' E((R_p - \overline{R_p})^4) + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n U}{\partial^n R_p} (R_p - \overline{R_p})^n \end{aligned}$$

Nous remarquons dès lors que les 4 premiers termes ne sont autres que les 4 premiers moments d'une fonction de probabilité donnée, à savoir, l'espérance, la variance, la Skewness et la Kurtosis. Le terme résiduel, quant à lui, exprime la somme des moments supérieurs jusqu'à l'infini. L'espérance de l'utilité fait donc intervenir les différentes dimensions de risque mentionnées. Ceci nous permet de faire un premier rapprochement entre le concept de la VaR et la théorie de l'utilité.

Par ailleurs, soit la richesse initiale d'un investisseur notée w , et \tilde{x} un terme aléatoire représentant un accroissement de richesse. Une fonction d'utilité relative à ces paramètres peut s'écrire ainsi : $U = U(w + \tilde{x})$. Le payoff est donc $\tilde{r} = \frac{\tilde{x}}{w}$. Nous pouvons exprimer cette fonction d'utilité de la manière suivante : $U = U(rw + w)$.

Si nous posons $\mu = E(w + rw)$, et en recourant à un développement de Taylor, nous obtenons :

$$E(U) \approx U(\mu) + \frac{U^2(\mu)}{2} \sigma^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\mu_i}{i!} U^i(\mu)$$

Avec, μ_i le i^{e} moment central et $U^i = \frac{\partial^i U}{\partial \mu^i}$.

Tous les moments supérieurs à 1 sont en fait autant de dimensions supplémentaires de risque. Il est généralement admis que les dérivées impaires d'une fonction d'utilité concave sont posi-

tives, et celles paires sont négatives. Un investisseur averse au risque préférera donc une asymétrie > 0 à une asymétrie < 0 . Il évitera par ailleurs une distribution à leptokurtisme positif, d'où sa tendance à vouloir le minimiser.

C'est donc dans ce sens que la VaR se présente comme une mesure de risque plus affine que les mesures classiques, puisqu'elle capte les moments supérieurs à 2 de la distribution des rendements. En effet, la VaR peut même être considérée comme supérieure à une fonction d'utilité quadratique (les plus utilisées) qui est supposée rendre compte d'une manière plus complète du goût de l'investisseur par rapport au risque. Ceci est dû au fait que les fonctions d'utilité, en l'occurrence, quadratiques, ne prennent pas en considération ces moments supérieurs à 2 dont il a été démontré plus haut l'utilité que dégage un investisseur à les considérer.

Nous pouvons donner un exemple très simple de cette limite. Supposons que 2 actifs X_1 et X_2 ayant des rendements respectifs, R_1 et R_2 , égaux, et des écart-types σ_1 et σ_2 , tels que, $\sigma_1 < \sigma_2$. Un investisseur averse au risque optera naturellement pour investir dans l'actif X_1 . Or, la prise en compte du 3^{ème} moment -la Skewness- noté S_1 pour X_1 et S_2 pour X_2 , aurait pu changer la donne. En effet, si $S_1 < S_2$, l'investisseur, du fait de la prise de conscience de cette asymétrie omise au départ aurait pu changer de décision d'investissement. Ce raisonnement est valable pour les moments d'ordre supérieur. La VaR par contre, a justement un recours exprès à ces moments, du fait que cette information se trouve dans la probabilité cumulative de la distribution des rendements considérés, en d'autres termes, le quantile plus ou moins justement calculé. Dès lors, un investisseur a une image plus complète du risque qu'il est capable, ou qu'il est prêt à courir.

Force est donc de constater que, pour avoir une image plus affine lors des processus d'investissement, il faudrait trouver le moyen de prendre en compte, et les moments d'ordre supérieur, et l'aversion au risque d'un investisseur donné, d'une façon synthétique et cohérente. Une piste reste toutefois à explorer, celle des fonctions d'utilité non quadratiques qui vont au-delà des 2 premiers moments d'une distribution de probabilité donnée.

III. 3. Sélection des classes d'actifs et formulation des anticipations du marché :

La troisième étape consiste à choisir les classes d'actifs éligibles. En matière d'allocation stratégique, cette phase permet de garder un contrôle effectif sur le profil de risque du portefeuille ainsi que de bénéficier des avantages effectifs de diversification. De ce fait, ce choix reste tributaire, et du profil de l'investisseur, et de sa stratégie d'investissement. Un fonds de pension de retraite n'a pas les mêmes contraintes de liquidité qu'une banque de détail ou qu'une compagnie d'assurance.

Toutefois, certains principes doivent être respectés lors d'une définition cohérente des classes d'actif, dont :

- Les actifs d'une classe d'actif donnée doivent être homogènes, une exposition sur les produits immobiliers ne doit pas faire part d'une classe d'actif qui englobe des produits de crédit classique, même de maturité équivalente.
- Les classes d'actifs doivent être mutuellement exclusives. Une classe d'actifs qui donne une exposition sur le segment 1-3 ans sur la courbe des taux, ne doit pas être considérée avec une autre classe avec une exposition 0-5 ans. La première étant englobée dans la seconde.
- Les classes d'actifs doivent être à même pour faire bénéficier des avantages de diversification, les corrélations entre les classes d'actifs doivent donc être analysées. Pour répondre à cette problématique d'une manière plus affine, Kritzman (1999)³⁰ a proposé un critère plus affiné pour juger de la qualité de diversification dans le choix des classes d'actifs.
- Chaque classe d'actifs doit être capable d'absorber une part substantielle du portefeuille de l'investisseur sans en compromettre la liquidité.

Pour l'univers des classes d'actifs à revenus fixes, des considérations macroéconomiques sont à prendre en compte. En effet, cet univers peut être séparé en secteurs, dont les titres similaires ou homogènes sont regroupés dans des ensembles cohérents. Nous pouvons par exemple considérer une classification par nature de sous-jacent en regroupant les émetteurs Corporate, souverains, supranationaux, Mortgage-backed securities (MBS)... ou encore par maturité, afin de choisir le compartiment de la courbe des taux auquel l'investisseur voudrait être exposé (0-1 an ou plutôt 7-10 ans), ou encore par niveau de risque, par référence aux notes attribuées par les agences internationales de rating (Investment ou speculative grade). En pratique, un mix de ces critères de différenciation est souvent utilisé pour définir les différents risques auxquels l'investisseur accepte de s'exposer (risque de marché, risque de crédit, risque de liquidité).

³⁰ Kritzman, M. (1999), 'Toward Defining an Asset Class', *The Journal of Portfolio Management* 2(1), pp. 79–82.

Une des phases les plus cruciales aussi bien sur le plan conceptuel que sur le plan opérationnel est l'anticipation des conditions de marché. En effet, c'est un input essentiel et déterminant quant à la décision de l'allocation stratégique. Cette phase nécessite des compétences aussi bien sur le plan économique et financier que quantitatif, intimement liées en pareille matière.

En outre, cette étape englobe les éléments suivant :

- Spécifier les informations déterminant à anticiper, ainsi que l'horizon temporel afférent.
- Collecter l'information historique fiable et pertinente et spécifier les méthodes et modèles à utiliser pour développer les anticipations.
- Interpréter l'environnement d'investissement actuel via l'information collectée et les méthodes appliquées.
- Formuler et documenter les anticipations, ainsi que les conclusions décisives.
- Effectuer un suivi et un contrôle permanent de l'état actuel des choses, afin de déterminer les écarts d'anticipation et d'y apporter les corrections nécessaires.

Cette démarche devrait *in fine* se traduire en une vision en Forward-Looking exprimée en termes d'anticipations sur les rendements, les volatilités ainsi que les corrélations des différentes classes d'actifs considérées.

III.3.1. La solution *Workbench* et les anticipations en *Forward-looking* des marchés :

Durant cette phase, la banque centrale de Tunisie développe une vision prospective suivant une démarche quantitative au moyen d'un dispositif à la pointe, en l'occurrence, la solution *Workbench*. Cette phase, se déroule en 3 étapes :

III.3.1.1. Modélisation des facteurs du modèle Nelson Siegel :

Modélisation des facteurs qui édictent la dynamique de la valeur des actifs. Pour ce faire, une modélisation des facteurs du modèle Nelson Siegel (1987)³¹ pour un échantillon de données historiques a été effectuée. Ce modèle arrive à expliquer la dynamique de la courbe des taux avec 3 facteurs, à savoir, un facteur de niveau qui prend en compte les mouvements parallèles de la courbe, un facteur de pente qui prend en considération l'évolution des taux selon

³¹ Nelson, C. R. and A. F. Siegel (1987), Parsimonious Modeling Of Yield Curves, Journal of Business, 60, 473–489.

les maturités, et enfin, un facteur de courbure, qui prend en considération les déformations de la courbe des taux, notamment les « *twist* » et les « *hump* ».

III.3.1.2. Développement du scénario de base via la simulation Monte Carlo :

Ces 3 facteurs étant estimés pour toute la série temporelle considérée, l'objectif est désormais de décrire et de prévoir leur dynamique future. Pour ce faire, la démarche basée sur le modèle VAR (*Vector Autoregressive*) de Sims (1980)³² est suivie. Dans un premier temps, les facteurs du modèle Nelson Siegel sont introduits dans un modèle VAR afin de déterminer la dynamique qui les régit (les coefficients du modèle VAR). Puis au moyen d'une simulation Monte Carlo sur l'erreur du modèle, un nombre important de courbe de taux est simulé. À chaque pas de simulation, les rendements des classes d'actifs considérées sont estimés. Grâce à cette méthodologie, les distributions de rendements sont générées, et une vision en Forward-Looking sur les rendements est construite. Il est à noter que les innovations simulées via la méthode Monte Carlo suivent une loi normale.

III.3.1.3. Anticipation des paramètres de marché en Forward-Looking :

La démarche précédente permet de générer un scénario de base. Ce dernier va être considéré avec 2 autres scénarios. Le scénario forward qui décrit la courbe des taux implicites à terme, dérivée de la courbe observée. Et le scénario consensus, qui décrit une courbe des taux basée sur les anticipations des analystes sur le marché, généralement suite à un sondage, et publiée sur les bases de données financières telles que Bloomberg.

C'est ainsi qu'une vision anticipative du marché en termes de rendements, de volatilités et de corrélation est construite sur l'horizon d'analyse choisi, ce qui va permettre de passer à la phase suivante.

III. 4. Construction du portefeuille politique

La quatrième étape consiste à construire un portefeuille selon une méthode d'optimisation donnée. Les inputs de cette optimisation seront les espérances et les volatilités ainsi que les corrélations des scénarios définis. Ainsi, un investisseur pourra considérer plusieurs scénarios, dont le scénario historique. Toutefois, un certain nombre d'hypothèse est à prendre en considération ici, ou plutôt à ne pas perdre de vue, selon la méthode d'optimisation choisie.

³² Sims, C. A., 1980, « Macroeconomics and Reality », *Econometrica*, vol. 48 (1), pp. 1-48.

Nous nous contenterons de rappeler ici, que c'est l'hypothèse de normalité des rendements qui est ici retenu si l'on considère les données historiques. Par ailleurs, quelle que soit la distribution des rendements générés, si l'on envisage l'écart-type en tant que mesure de risque, ceci généralement induit en erreur, puisque la réalité des marchés fait que ce proxy de risque (l'écart-type) n'est pas constant au fil du temps. En d'autres termes, une classification du risque des classes d'actifs selon leurs volatilités est sujette à changement au fil du temps. Nous dirons alors que les volatilités sont dynamiques. Cette spécificité des marchés a un impact direct sur l'optimalité des portefeuilles optimaux construits. En effet, rien qu'en prenant en compte les innovations dans les volatilités des classes d'actifs, l'optimalité du portefeuille construit sera remise en question. Or, comme nous le disions plus haut, la sensibilité de certaines méthodes d'optimisation aux inputs introduits peut rendre la prise en compte de ces innovations délicate sur le plan pratique. En effet, si la composition du portefeuille change radicalement d'une innovation à l'autre, ceci ira à l'encontre de l'optique stratégique de l'ASA, hormis les coûts de transactions conséquents inhérents aux rééquilibrages consécutifs du portefeuille.

III. 5. Analyse de scénarios, stress-testing et implémentation de l'Allocation stratégique d'Actifs :

Cette étape devrait permettre de valider l'ASA développée. Un stress testing et une analyse de scénarios sont conduits pour juger de la solidité du portefeuille construit. La résilience de la stratégie développée est jugée par rapport aux critères de risques et aux objectifs fixés lors des étapes précédentes.

Ces analyses sont généralement effectuées en émettant des hypothèses sur des mouvements non parallèles de la courbe des taux, des simulations historiques en se basant sur des scénarios déjà vécus durant le passé, ou encore des scénarios en « *Forward-Looking* », tels que par exemple un choc sur le marché pétrolier international, ou un changement de politique majeur d'un pays du G7...

Enfin, à la lumière de ces différents tests, et après d'éventuels ajustements, l'implémentation de l'ASA est effectuée. Les benchmarks politiques répliquant les classes d'actifs fournis par l'ASA étant fixés, deux stratégies peuvent être choisies, une répllication passive, ou une gestion active. Cette dernière vise à surperformer lesdits benchmarks politiques. Les points de repère étant ainsi fixés, une révision périodique est ainsi conduite selon les conditions du marché, le changement des objectifs de l'investisseur, ou encore la situation d'optimalité du portefeuille.

Conclusion :

Nous avons essayé dans ce chapitre, d'introduire le lecteur à l'allocation stratégique d'actifs. Du fait même de l'envergure de cette discipline qui circonscrit quasiment tout le processus d'investissement sur les marchés financiers, nous ne pouvions espérer jeter la lumière sur tous ses aspects. Nous avons par exemple omis de parler de l'approche « *Asset-Liability Management* » qui est la seconde approche majeure de l'ASA avec l'approche « *Asset-only Management* » que nous avons traité dans le présent chapitre. Nous nous sommes donc bornés à faire une brève introduction sur certains aspects que nous considérons fondamentaux. Nous avons, par ailleurs, essayé de mettre en exergue, un tant soit peu, certains points qui concernent plus directement le travail que nous nous sommes proposé de mener dans ce cadre. Nous nous sommes focalisés essentiellement sur la partie qui concerne le marché, en l'occurrence, la prise en compte des conditions de marché, la formulation de la procédure d'anticipation des paramètres, ainsi que la détermination des rendements, des risques, et des corrélations espérés. Par ailleurs, nous avons aussi porté une attention sur les différents paradigmes d'optimisation, ainsi que les forces et faiblesses de chacun d'eux.

Ce qui est essentiellement à retenir pour la suite du travail, est que l'ASA est la plus importante décision dans le cadre de gestion de portefeuille. C'est pour cela que chaque étape est cruciale dans son développement. De ce fait un investisseur averti ne doit pas perdre de vue les hypothèses sous-jacentes à chaque phase. Nous avons en vue, notamment, l'hypothèse de normalité appliquée aux innovations relatives aux processus de rendements, ainsi que la considération de l'écart-type en tant que mesure adéquate de volatilité, ce qui aurait été tout à fait justifiable si les rendements étaient normalement distribués. Corrélativement, les corrélations entre les rendements des différentes classes d'actif sont aussi en cause, puisqu'une démarche spécifique devrait leur être consacrée afin de rendre compte de ladite non-normalité de la distribution des rendements.

Nous pouvons maintenant aborder la question des risques extrêmes en introduisant l'une des mesures de risque probabiliste à laquelle nous avons fait allusion plus haut, à savoir la *Value at Risk*. En effet, nous comptons nous baser sur celle-ci pour apprécier le risque extrême supporté par l'investisseur. Mais pour ce faire, une approche adéquate doit être suivie. C'est ce que nous comptons développer dans le chapitre suivant.

Chapitre II :

Cadre théorique de la
« *Value at Risk* »

Introduction :

Dans cette partie nous avons tout d'abord introduit le concept de la *Value at Risk*, son développement dans l'histoire, ainsi que ses forces et ses faiblesses telles que soulignées dans la littérature afférente. Puis dans un second temps, nous avons présenté les différentes approches de son calcul. Pour chaque méthodologie, nous avons présenté l'intuition derrière sa genèse, la revue de littérature qui s'y rapporte ainsi que ses forces et ses faiblesses. Nous avons aussi, en suivant le même schéma, présenté les différentes extensions qui ont été apportées à chaque démarche qu'elles soient théoriques ou bien valable sur le plan pratique. Nous avons naturellement porté une attention particulière sur les approches qui nous importent le plus dans le cadre du présent travail. Enfin, nous avons souligné le rapport de la VaR avec l'approche de calcul de volatilité utilisé, notamment, le fait de recourir à une actualisation des données historiques utilisées. Ceci nous sera utile par la suite afin de conduire une étude empirique sur le sujet.

I. Présentation de la *Value at Risk* :

I.1. Qu'est-ce que la *Value at Risk* ?

D'un point de vue pratique la Value at Risk -VaR par la suite- mesure la perte potentielle suite à la détention d'un actif risqué, ou encore d'un portefeuille constitué d'actifs risqués. Elle est caractérisée par un intervalle de confiance et un horizon de temps donné.

À titre d'exemple, si VaR d'une position sur un actif risqué (ou d'un portefeuille d'actifs risqués) est de \$100 millions à un jour, pour un intervalle de confiance de 99%, il y a seulement 1% de chance pour qu'il y ait une perte qui dépasserait ce montant. Ou encore, sur 100 jours de cotation, la perte encourue suite à la détention d'un actif risqué ne dépasserait la VaR qu'un seul jour.

La VaR admet donc trois éléments clés, à savoir, un niveau spécifié de perte en valeur, un horizon temporel fixé durant lequel le risque sera évalué (1 jour, 5 jours...) et un intervalle de confiance (95%, 99%, 99,9%...). Cette mesure se focalise donc sur le risque de mouvement baissier (ou de mouvement adverse) ainsi que sur la perte potentielle.

Pour estimer la probabilité de perte avec un intervalle de confiance donné, il y a lieu de définir une distribution de probabilité pour chaque facteur de risque, la corrélation entre ces facteurs, et enfin, l'impact de ces derniers sur la valeur de l'actif risqué.

La VaR est donc une tentative de faire ressortir un seul chiffre qui résumerait le risque global supporté suite à la détention d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs financiers risqués. Elle est devenue largement utilisée par les managers de fonds ainsi que les institutions financières. Les banques notamment ont traditionnellement utilisé la VaR afin de déterminer le capital adéquat à détenir suite à une exposition de risque donnée.

I.2. Limites majeurs de la VaR :

Si nous considérons la VaR en tant que telle, c'est à dire en négligeant le niveau de la position détenue en actifs risqués, le nombre des paramètres se réduit à 2. Ces deux paramètres qui sont utilisés dans le calcul sont arbitraires, à savoir l'horizon temporel prédéterminé de détention de la position risqué (1 jour, 1 semaine, 1 mois) et l'intervalle de confiance.

L'intervalle de confiance :

Ce dernier, nous disons qu'il détermine la probabilité que la perte puisse être supérieure ou égale à la VaR. En effet la VaR à 99% est supérieure à la VaR 95%, le niveau de risque dépend

donc directement du degré de confiance choisi. La VaR augmente dès que le niveau de confiance augmente. De plus, elle va augmenter à un taux supérieur à chaque fois que le degré de confiance est augmenté.

L'horizon temporel :

Il s'agit de l'intervalle de confiance et de l'horizon temporel N , mesuré en termes de jours. En pratique N est généralement fixé à 1 jour si la VaR vise le risque de marché. Ceci est dû à la non disponibilité d'un nombre suffisant d'observations pour estimer le comportement des variables de marché au-delà de cet horizon.

Pour aller au-delà de cet horizon, l'hypothèse habituelle est de multiplier la VaR à 1 jour par la racine carrée de l'horizon de placement visé (en termes de jours).

Formellement :
$$\text{VaR } N\text{-jour} = \text{VaR } 1\text{-jour} \times \sqrt{N}$$

Cette formule est vraie sous la condition que les variations journalières successives de la valeur de l'actif risqué soient indépendamment et identiquement normalement distribuées avec une moyenne nulle, sinon ce n'est qu'une approximation.

Il est à noter que le taux d'augmentation de la VaR est déterminé en partie par la moyenne de la distribution des rendements. Si la moyenne de la distribution, μ , est égale à 0, alors la VaR va augmenter par le facteur \sqrt{N} (la racine carrée de l'horizon de placement). Si par contre $\mu > 0$ alors la VaR augmente à un taux moindre, et peut éventuellement diminuer. Il faut donc garder en tête que la moyenne de la distribution des rendements est un paramètre important pour pouvoir estimer les changements de la VaR suite à l'augmentation de l'horizon de détention.

1.3. La VaR dans l'histoire :

Nonobstant le fait que le terme « Value at Risk » n'était pas largement utilisé avant la moitié des années 90, l'origine de cette mesure réside un peu plus loin dans l'histoire. Le sous-bassement mathématique de la VaR a été largement développé dans le contexte de la théorie de portefeuille par Harry Markowitz et d'autres chercheurs. Même si de prime abord leurs efforts étaient plutôt orientés vers la composition optimale des portefeuilles en actions, leur focalisation sur les risques émanant du marché et l'effet de leurs mouvements conjoints était central pour la manière dont la VaR a été calculée.

Par ailleurs, les motivations pour l'utilisation des mesures de la VaR trouvent leurs sources dans les crises que l'industrie financière a connues dans l'histoire.

Les premières exigences réglementaires en termes de capital affligées aux banques ont vu le jour après la grande dépression quand la SEC (Securities Exchange Commission), le gendarme boursier américain, a établi le « *Securities Exchange Act* ». Ce texte exigeait des banques de maintenir leurs prêts en deçà de 2000% de leurs fonds propres. Durant les années suivantes, les banques ont commencé à développer des dispositifs de division des mesures de risque et de contrôle afin de s'assurer du respect des exigences réglementaires. Avec l'avènement des marchés dérivés et les taux de change flottants de nouveaux risques ont vu leur genèse au début des années 70. Ceci a motivé la SEC d'établir la « *Uniform Net Capital Rule* », qui a été promulguée en 1975, et qui vient redéfinir et élargir les exigences en capital en catégorisant les actifs financiers détenus par les banques en 12 classes selon leurs risques, et en assignant des exigences en capital pour chacune des catégories. Les banques étaient dès lors de reporter leurs calculs relatifs à leurs capitaux trimestriellement dans un rapport baptisé FOCUS, « *Financial and Operating Combined Uniform Single* ».

Les premières mesures réglementaires qui évoquent la Value at Risk ont été initiées en 1980, quand la SEC a ancré les exigences en capital des établissements financiers aux pertes potentielles à un niveau de confiance de 95%, pour un intervalle de 30 jours, pour chaque classe d'actif. Les rendements historiques étant à la base du calcul des pertes potentielles.

Même si la SEC ne le décrit pas comme tel expressément, avec cette mesure elle vient de demander aux banques d'embarquer dans le processus d'estimation de la VaR (95%, 1 mois) et de détenir le capital nécessaire pour couvrir ce risque.

Par ailleurs, la nature des portefeuilles d'investissement et de trading des banques commerciales devenaient de plus en plus volatiles, créant ainsi un besoin de mesures de risque plus précises et sophistiquées. C'est Kenneth Garbade, travaillant à l'époque au « *Bankers Trust Cross Markets Research Group* », dans un document interne, qui présenta des mesures sophistiquées de la VaR en 1986³³ pour les portefeuilles *Fixed-Income* de la firme, basées sur la matrice des covariances des rendements de bons de différentes maturités.

Aux aurores des années 90, plusieurs firmes ont développé des mesures rudimentaires de la VaR avec de larges variantes de calcul quant à sa méthodologie de calcul. Cependant, après de désastreuses pertes subies par les établissements financiers associées à l'utilisation des produits

³³ Garbade, Kenneth D. (1986). « *Assessing risk and capital adequacy for Treasury securities* », Topics in Money and Securities Markets, 22, New York : Bankers Trust.

dérivés entre 1993 et 1995, couplées à la faillite de la banque d'investissement anglaise *Barings* pareillement à cause d'opérations non autorisées de trading sur dérivés sur le Nikkei, les banques devenaient prêtes à adopter des mesures de risque plus compréhensive.

En 1995, la banque J.P. Morgan donna un accès public aux données sur les variances et covariances sur différents titres et différentes classes d'actifs, déjà utilisées en interne depuis pratiquement une décennie. Elle permit le développement de logiciel pour cette fin, et appela le service *RiskMetrics*TM et utilisa le terme Value at Risk pour la mesure de risque qui en ressortit de ces données. Cette dernière trouva une grande audience aussi bien des banques que des régulateurs suite notamment à son caractère intuitif.

Selon certains auteurs³⁴ qui se sont intéressés à l'histoire de la VaR, *RiskMetrics*TM n'était pas une percée technique en soi. En effet, bien que ce document présentait à l'époque des idées originales, pour la plupart, il décrivait des pratiques déjà largement utilisées. Sa VaR linéaire, est de loin moins sophistiquée que celle de Garbade (1986) or Wilson (1993)³⁵. La contribution la plus importante de *RiskMetrics*TM est qu'il ait diffusé à une large audience le concept de la VaR.

I.4. Une mesure de risque cohérente ?

Pour mesurer à bon escient un risque donné, il faudrait d'abord définir ce que c'est qu'une mesure de risque. Si nous considérons R un ensemble d'événements aléatoires et $\rho(R)$ la mesure de risque qui lui est associé, alors une mesure de risque cohérente devrait vérifier les propriétés suivantes :

1. **Monotonie** : un portefeuille avec des rendements futurs plus importants devrait avoir un moindre risque : $R_1 \geq R_2$, alors $\rho(R_1) \leq \rho(R_2)$.
2. **Sous-additivité** : le risque d'un portefeuille est au maximum le risque des actifs qui le constituent : $\rho(R_1 + R_2) \leq \rho(R_1) + \rho(R_2)$.
3. **Homogénéité positive** : la taille β du portefeuille doit impacter la taille de son risque (et non sa magnitude) : $\forall \beta > 0, \rho(\beta R) = \beta \rho(R)$
4. **Invariance par translation** : le risque de portefeuille est dépendant du risque des actifs qui le constituent : pour toutes les constantes C , $\rho(C+R) = \rho(R) - C$.

Les propriétés 1, 3 et 4 sont des propriétés plutôt simples des distributions bien établies.

³⁴ Glyn A. Holton. (2002). « *History of Value-at-Risk : 1922-1998* », Working Paper July 25, 2002

³⁵ Wilson, Thomas (1993). Infinite wisdom, Risk, 6 (6), 37-45.

- La monotonie implique que si une valeur aléatoire future R_1 est toujours plus grande qu'une valeur aléatoire future R_2 , alors le risque de la distribution des rendements pour R_1 est inférieur à celui de la distribution des rendements pour R_2 .
- L'homogénéité positive suggère que le risque d'une position est proportionnel à sa taille. Cette propriété doit se vérifier tant que l'actif en question est coté dans un marché liquide.
- L'invariance par translation implique qu'ajouter un actif sans risque réduit le risque au même taux que le niveau de cash en besoin pour garder une position acceptable.
- La sous-additivité (2^{ème} propriété) est la propriété la plus importante pour une mesure de risque cohérente. Elle établit qu'un portefeuille construit à partir de sous-portefeuilles aura un risque inférieur ou égal à la somme des risques individuels de chaque sous-portfeuille. Ceci suppose que, quand des risques individuels sont combinés, il en résulte des effets bénéfiques liés à la diversification, sinon, à défaut, pas de risque supplémentaire à supporter. Ce qui implique que le fait de grouper ou additionner des risques ne devrait pas augmenter le risque global agrégé.

Pour remédier à ces carences, un concept intimement lié à la VaR a été développé, c'est la *Conditional VaR* ou encore la *CVaR*, dite aussi *Expected Shortfall*³⁶.

II. Méthodologies pour le calcul de la Value at Risk :

En général, trois approches sont admises afin de calculer la VaR appartenant à deux grandes familles. En l'occurrence, l'approche analytique impliquant certaines hypothèses généralement simplificatrices, concernant, notamment, la distribution des rendements en rapport avec le risque de marché. L'approche historique, en ayant recours à la construction de portefeuilles hypothétiques en se basant sur les données historiques. Et enfin la simulation Monte Carlo. Par ailleurs, chaque approche admet plusieurs variantes.

Il est à noter cependant que la 1^{ère} méthode appartient à la famille des approches paramétriques (dont on en va illustrer quelques-unes par la suite), la 2^{ème} et la 3^{ème} approche appartiennent à la famille des approches non-paramétriques.³⁷

³⁶ Artzner P., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. "Coherent Measures of Risk." *Mathematical Finance* 9 (1999): 203–228.

³⁷ Il existe par ailleurs une sous-famille qui englobe les approches dites semi-paramétriques intégrant la théorie des valeurs extrêmes qui ne fera pas l'objet de ce mémoire. Cette sous-famille présente l'inconvénient d'être lourde à mettre en œuvre ce qui ne permet pas un calcul quotidien.

II.1. L'approche paramétrique :

Cette famille d'approches présente l'avantage d'être beaucoup moins exigeante en termes de temps et de calcul relativement à la famille des approches non-paramétriques. En effet, les approches non-paramétriques nécessitent la réévaluation de la valeur du portefeuille pour chaque innovation dans le facteur de risque. Cette condition implique que chaque actif composant le portefeuille doit faire l'objet d'un nouveau pricing pour les différentes valeurs que les facteurs de risque peuvent prendre. Calculer la Value at Risk selon cette famille d'approche s'avère donc chronophage, et mobilise un effectif important de pricers et d'analyste. Les approches paramétriques viennent pallier à ces difficultés du fait qu'elles n'exigent pas le recalcul de la valeur du portefeuille à chaque pas. En effet, cette famille d'approche approxime la VaR, ce qui lui confère l'avantage d'être plus rapide et simple à mettre en place et moins lourde, cependant, quelque peu moins précise, à moins que le pricing via une fonction d'approximation linéaire ou quadratique des facteurs de risque peut se faire sans problème en vérifiant un soubassement théorique valable et approprié.

La première approche de ce genre a été proposée par *RiskMetrics*TM. L'approximation utilisée dans ce document était linéaire. Par la suite, une importante littérature dédiée aux approximations quadratiques a été développée.

II.1.1. La méthode de Variance-Covariance :

Partant du principe que la VaR mesure la probabilité que l'actif, ou le portefeuille d'actifs risqués, perde un montant déterminé durant un horizon temporel prédéfini, cela devrait être relativement simple de la calculer si nous pouvons dériver la distribution de probabilité des pertes potentielles. C'est effectivement la démarche adoptée suivant cette méthode. Ceci lui vaut l'avantage d'être intuitive et simple. La difficulté réside dans le fait de dériver la distribution de probabilité adéquate.

- Description de l'approximation couramment utilisée dite gaussienne :
Pour recourir à un exemple illustratif de cette méthode, considérons un actif risqué dont les valeurs possibles sont normalement distribuées avec une moyenne de \$100 et un écart type annuel de \$10. Pour un intervalle de confiance de 90%, cet actif ne peut prendre une valeur inférieure à \$83,5 durant l'année à venir, et symétriquement, il ne peut avoir une valeur de plus de \$116,5 durant le même horizon temporel.

Formellement :
$$\text{VaR}(90\%, 1\text{an}) = \mu \pm Z_{\alpha}\sigma_{\text{annuel}}$$

Avec $Z_{\alpha} = 1,65$ car l'actif en question $X \sim N(\mu, \sigma)$

Et α : l'intervalle de confiance (ici 90%)

En effet puisque la distribution normale est symétrique nous avons :

$$\begin{aligned} P(X < -1.65\sigma + \mu) &= P(X > 1.65\sigma + \mu) \\ &= 5\% \end{aligned}$$

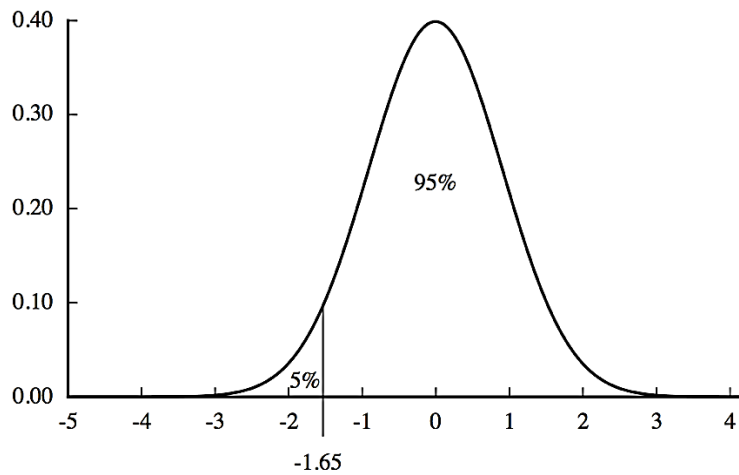
Et puisque la superficie totale = 100%, nous avons alors,

$$P(-1.65\sigma + \mu < X < 1.65\sigma + \mu) = 90\%$$

$$\text{Et } P(-1.65\sigma + \mu < X) = 95\%$$

Ce qui graphiquement se présente comme suit :

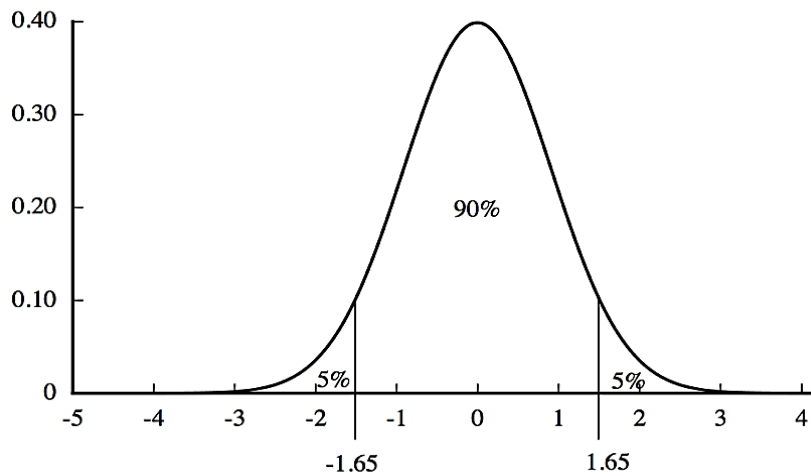
Figure i: Intervalle de confiance de la distribution normale à une borne



Source : John Hull, Options, Futures and other derivatives, 11th edition

Ou encore :

Figure ii : Intervalle de confiance de la distribution normale à 2 bornes



Source : John Hull, Options, Futures and other derivatives, 11th edition

Attractivité de l'utilisation des quantiles :

Le risque de marché est généralement mesuré en termes de quantile de la distribution des rendements du portefeuille. L'attrait de l'utilisation des quantiles d'une distribution par rapport à la variance est que les quantiles prennent en compte, et la magnitude, et la probabilité exacte de survenance d'un événement ayant une magnitude donnée, ou symétriquement de ne pas la dépasser.

Le $q^{\text{ème}}$ quantile d'une distribution de rendements est défini en tant que la variable qui prend la valeur d'un rendement en dépassement de α % des rendements considérés. Mathématiquement le quantile d'une distribution de probabilité continue donnée par la formule suivante :

$$q_{\alpha} = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx$$

Où $f(x)$: la fonction de distribution de probabilité.

Pour revenir à notre exemple, cette approche se complexifie considérablement si l'actif devient un portefeuille comportant plusieurs actifs. Ceci est dû au fait que les actifs présentent généralement une certaine structure de dépendance décrite dans le cadre le plus commun par la covariance. En effet, si nous prenons un portefeuille composé de 150 actifs le nombre des covariances à estimer est de 11 175. Sans compter les 150 variances caractérisant chaque actif.

Cette approche devient très vite lourde à mettre en place sans une grande capacité de calcul, surtout si le portefeuille admet un changement fréquent de ses composantes.

Une méthodologie plus commode est donc suivie pour pallier à ce problème et simplifier le processus du calcul. Il s'agit de faire un *Map* du risque inhérent à chaque actif composant le portefeuille (retracer ses Cash-flows), et ce, afin de l'associer à un facteur de risque de marché plus commun. Puis de calculer la VaR en se basant sur ces facteurs de risque de marché.

Pour illustrer ce concept de *Risk Mapping* d'une façon plus intelligible, nous allons considérer un bon du trésor vanille, de maturité 5 ans, versant annuellement un coupon noté C, et remboursé *in fine* à sa valeur nominale notée VN. Ce bon va être considéré par rapport aux cash-flows qu'il génère.



Ces flux vont être considérés par la suite comme étant des bons zéro-coupon.

Les 4 premiers flux (valeur faciale = C) seront associés aux taux zéro-coupon de 1 à 4 ans respectivement à leurs échéances. Le dernier flux (valeur faciale = C+VN) sera associé au taux zéro-coupon 5ans.

Ce processus de *mapping* se complique considérablement si l'on a affaire à des portefeuilles d'actions ou encore à des options. Toutefois, il permet d'éviter l'estimation des variances et covariances d'un nombre important d'actifs pouvant composer le portefeuille, et de se focaliser plutôt sur des facteurs de risque de marché plus communs et de nombre beaucoup plus réduit. Dans notre cas illustratif, il s'agira de la matrice des covariances des taux zéro-coupon pour les maturités concernées.

Pour revenir à la méthodologie du calcul, il s'agit de passer par 4 grandes étapes :

1. La première étant de simplifier chaque actif en le transformant en un actif plus standard (Pour donner un autre exemple, nous pouvons considérer un contrat Futures à 6 mois sur USD/EUR en tant qu'une position sur 2 instruments standards, à savoir, le taux sans risque à 6 mois sur le dollar et une position longue sur le spot USD/EUR sachant qu'à l'équilibre :

$$F^0_{\text{USD/EUR}} = S^0_{\text{USD/EUR}} \times (1 + rf^0_{\text{USD, 6 mois}})$$

2. Il s'agit par la suite d'appareiller chaque flux émanant de l'actif détenu ou des actifs composant le portefeuille détenu à l'instrument standard associé. Dans notre cas il s'agira des bons à zéro-coupon.
3. Une fois ces instruments standards identifiés, il faudra procéder à l'estimation des variances et covariances de ces derniers. En pratique, cette matrice s'obtient depuis les données historiques. Les paramètres de ces facteurs de risque sont essentiels pour le calcul de la VaR.

4. Enfin, la VaR est obtenue en procédant en multipliant le vecteur des poids de chaque instrument standard (obtenu à la 2^{ème} étape) par la matrice des covariances de ces instruments (obtenu à la 3^{ème} étape).

L'hypothèse implicite lors du calcul de la VaR à l'étape 4 est que la distribution sous-jacente est normale. En effet, si le rendement de chaque actif est supposé suivre une loi normale, le portefeuille composé par ces mêmes actifs devrait suivre alors une loi normale. Cette hypothèse simplificatrice et peu réaliste est généralement admise lors du calcul de la VaR.

II.1.2. La contribution de l'approche *RiskMetrics™* :

La contribution majeure de ce service lancé en 1995, rappelons-le, est qu'il a rendu public gratuitement les matrices des covariances entre les différentes classes d'actifs, ce qui a facilité la tâche à quiconque voulant calculer d'une manière analytique la VaR d'un portefeuille. Il est par ailleurs d'usage d'illustrer les hypothèses sous-jacentes de l'approche de calcul de la VaR telle que présentée par J.P. Morgan dans son document technique de 1996³⁸.

- Le rendement des facteurs de risque individuels sont supposés suivre une loi normale conditionnelle. Même si les rendements en tant que tels peuvent s'écarter de la condition de normalité, avec la présence anormale de valeurs extrêmes, l'hypothèse stipule que les rendements standardisés (c'est à dire divisés par la volatilité prévisionnelle) sont normalement distribués.
- La focalisation sur les rendements standardisés implique que ce n'est pas la valeur des rendements en tant que telle qui est considérée, mais c'est la valeur relative à la volatilité. En d'autres termes, un rendement important durant une période de forte volatilité peut résulter en un rendement standardisé faible, alors que le même rendement sera considéré anormalement élevé durant une période de faible volatilité.

La considération sur les rendements normalisés standardisés expose le calcul de la VaR au risque de présenter des valeurs extrêmes à une fréquence plus importante que prévu dans le cadre d'une distribution normale.

³⁸ Cf. *RiskMetrics – Technical Document*, J.P. Morgan, December 17, 1996; Zangari, P., 1996, *An Improved Methodology for Computing VaR*, J.P. Morgan RiskMetrics Monitor, Second Quarter 1996.

II.1.3. Évaluation de l'approche :

L'attrait de l'approche Variance-Covariance de base de *RiskMetrics*TM, une fois que les hypothèses concernant la distribution des rendements, les moyennes et les variances ont été formulées, réside dans la simplicité avec laquelle nous pouvons calculer la VaR.

Trois grandes faiblesses sont à mentionner :

1. Hypothèse sur les distributions : Si les rendements conditionnels ne sont pas normalement distribués, la VaR calculée sous-estimera la vraie VaR. Ceci est d'autant plus dangereux si la vraie distribution des rendements présente des valeurs extrêmes à une fréquence élevée.
2. Inputs erronés : Même si l'hypothèse sur les rendements standardisés tient, la VaR calculée sera toujours erronée si les variances et covariances utilisées sont erronées. En effet ces données, si elles sont estimées depuis des données historiques, il existera une erreur standard associée à chaque paramètre estimé à partir de l'échantillon utilisé.
3. La non-stationnarité des variables : Ce problème surgit lorsque les variances et les covariances varient dans le temps. Ceci est très normal puisque les fondamentaux des variables, et entre les variables, évoluent dans le temps. Il s'en suit alors un autre problème qui compromet le calcul de la VaR.

II.1.4. Extensions :

Certains auteurs se sont intéressés aux limites présentées à cette approche et ont développé des cadres plus commodes afin de combler ses carences. L'intérêt a été porté essentiellement sur les hypothèses des distributions ainsi que les variances et covariances utilisées. Hull et White (1998a)³⁹ ont suggéré un moyen d'estimer la VaR quand les variables ne sont pas normalement distribuées. En effet ils ont laissé libre choix à l'utilisateur quant à la distribution de probabilité des variables mais requièrent qu'une transformation adéquate soit établie pour que la distribution soit normale multivariée. Ce travail, et bien d'autres, ont développé des cadres permettant d'apporter des variantes intéressantes. Toutefois, l'estimation des paramètres de modèles non normaux peut s'avérer une tâche très difficile. De plus, les probabilités de pertes sont beaucoup plus compliquées à déterminer dans le cadre de distributions asymétriques et leptokurtiques (queues de distribution épaisses) que dans le cadre normal.

³⁹ Hull, J. and A. White "Value at Risk when Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed," *Journal of Derivatives*, Spring 1998, pp 9-19.

D'autres chercheurs, à l'instar d'Engle (2001)⁴⁰, se sont concentrés sur l'amélioration des techniques d'estimation des variances et covariances à utiliser pour le calcul de la VaR. Pour ces derniers, les innovations statistiques peuvent fournir de meilleures estimations que les techniques d'amélioration de l'échantillonnage (qui réduise l'erreur standard des paramètres). En effet le cadre conventionnel de base émet l'hypothèse que la variance des rendements est homoscedastique (ne varie pas au cours du temps) ce qui est très réducteur et ne correspond aucunement à la réalité. Dans son article de 2001, Engel remet en cause cette hypothèse et stipule que les estimations basées sur des modèles qui prennent explicitement en compte l'hétéroscédasticité de la variance (varie au cours du temps) apportent des résultats de loin meilleurs. Dans son approche, il a suggéré le recours à 2 modèles, à savoir, les modèles ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) et GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) qui apportent de meilleures prévisions de la variance, et donc, une meilleure estimation de la VaR suivant l'approche paramétrique classique.

II.1.4.1. Les modèles d'approximation linéaire :

Le modèle *RiskMetrics*TM pour la distribution de l'évolution des facteurs de risque est basé sur l'hypothèse que les rendements logarithmiques des prix (ou des variations pour le cas des taux d'intérêt) sont indépendants dans le temps, et normalement distribués quand il est mis à l'échelle via une mesure adéquate de la volatilité (rendements standardisés).

Si nous dénotons $(X^1_t, \dots, X^n_t)_t$ le processus des facteurs de risque, (nous allons considérer ici que ces facteurs de risque sont les prix, mais *l'approche* est strictement la même si il s'agit de taux d'intérêt) les rendements logarithmiques entre t et $t+1$ sont supposés s'exprimer ainsi :

$$r^n_{t,t+1} = \sigma^i_t \mathcal{E}^i_{t,t+1}$$

Où la distribution des $\mathcal{E}^i_{t,t+1} = (\mathcal{E}^1_{t,t+1}, \dots, \mathcal{E}^n_{t,t+1})$ est gaussien avec $\langle \mathcal{E}^i_{t,t+1}, \mathcal{E}^j_{t,t+1} \rangle = \rho^{ij}_t$ conditionné par la réalisation du processus de la matrice variance-covariance $(\Sigma_t)_t$, avec $\Sigma^{ij}_t = \sigma^i_t \sigma^j_t \rho^{ij}_t$.

⁴⁰ Engle, R., 2001, Garch 101: The Use of ARCH and GARCH models in Applied Econometrics, Journal of Economic Perspectives, v15, 157-168.

Si on suppose alors un modèle IGARCH (1,1) (integrated GARCH) pour modéliser les rendements, formellement :

$$r_{t,t+1}^i = \sigma_t^i \varepsilon_{t,t+1}^i$$

$$\sigma_t^{i^2} = \lambda \sigma_{t-1}^{i^2} + (1-\lambda) r_{t-1}^{i^2}$$

$$\rho_{ij}^j = \frac{1}{\sigma_t^i \sigma_t^j} [\lambda \sigma_{t-1}^i \sigma_{t-1}^j \rho_{ij}^{ij} + (1-\lambda) r_{t-1}^i r_{t-1}^j]$$

où $\varepsilon_{t,t+1}^i | \Sigma_t \sim N(0, \Sigma_t)$ et où $\varepsilon_{t,t+1}^i | \Sigma_t$ sont indépendants dans le temps.

Il faut noter que le facteur de risque n'admet pas de drift du moment où les rendements ont une moyenne nulle. Cette hypothèse est basée sur le fait qu'il n'y a pas de drift sur le court et moyen terme (moins de 3 mois), absence d'autocorrélation entre les rendements, et présence d'autocorrélation positive entre les rendements carrés (clusters de volatilité, queues de distribution épaisses).

Une autre façon de voir les processus de volatilité et de corrélation est de considérer une estimation de processus en moyenne mobile exponentielle (EWMA pour dire Exponentially Weighted Moving Average). Ainsi, suivant le document technique de *RiskMetrics*TM, le facteur d'échelle λ calibre les observations passées à prendre en compte prend une valeur de 0.94 pour les rendements quotidiens et $\lambda = 0.97$ pour les rendements mensuels.

II.1.4.2. L'approximation de VaR en portefeuille selon l'approche Delta-Normal :

L'idée générale sous-jacente au calcul de la VaR, selon la méthode paramétrique, est d'approximer le rendement du portefeuille en recourant à l'approximation des formules de pricing de chaque actif composant le portefeuille, et ce, dans le but de déboucher sur une simple formule analytique pour le calcul de la VaR. Ceci nous rappelle le concept de la Duration initié par Macaulay en 1938⁴¹, et la Duration modifiée (appelée aussi sensibilité). Ce concept, suite à une approximation linéaire, détermine une estimation de la variation de la valeur d'une obligation, ou d'un portefeuille composé d'obligations, suite à une variation minime du taux d'intérêt. L'approximation selon l'approche Delta-Normal s'avère exacte pour les instruments à structure linéaire. Par contre elle devient discutable si les portefeuilles admettent des instruments non linéaires.

⁴¹ Macaulay, F. Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. since 1856. New York, NY: National Bureau of Economic Research, 1938.

Mathématiquement : si on note V la valeur du portefeuille, alors :

$$V(X_{t+1}^1, \dots, X_{t+1}^n) \simeq V(X_t^1, \dots, X_t^n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial X^i}(X_t^1, \dots, X_t^n) (X_{t+1}^i - X_t^i)$$

$$V(X_{t+1}^1, \dots, X_{t+1}^n) \simeq V(X_t^1, \dots, X_t^n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial X^i}(X_t^1, \dots, X_t^n) r_{t,t+1}^i X_t^i$$

D'où :

$$R = \frac{V(X_{t+1}^1, \dots, X_{t+1}^n) - V(X_t^1, \dots, X_t^n)}{V(X_t^1, \dots, X_t^n)}$$

est approximé par :

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^n \frac{X_t^i}{V_t} \frac{\partial V}{\partial X^i}(X_t^1, \dots, X_t^n) r_{t,t+1}^i$$

Cette fonction est donc linéaire sur le rendement du facteur de risque et nous pouvons donc déterminer la VaR associé au portefeuille linéaire. Ceci est le principal point fort de la méthode Delta-Normal présenté par *RiskMetrics*™. Puisque les rendements des facteurs de risque sont supposés suivre un processus conditionnellement normal, une fois le processus EWMA calculé, \tilde{R} devient alors une variable aléatoire avec une distribution normale avec une moyenne de 0 et un écart-type :

$$\sigma_t^{\tilde{R}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{X_t^i}{V_t} \frac{\partial V}{\partial X^i}(X_t^1, \dots, X_t^n) \right) \Sigma_t^{i,j} \left(\frac{X_t^j}{V_t} \frac{\partial V}{\partial X^j}(X_t^1, \dots, X_t^n) \right)}$$

Maintenant, en utilisant cette distribution approximée des rendements du portefeuille, l'estimation de la VaR se résume au calcul du quantile $(1-p)$ d'une variable aléatoire ayant une distribution gaussienne.

Ceci se calcule facilement en utilisant le quantile z_p d'une variable gaussienne standard. Ainsi nous obtenons l'expression analytique de la VaR (où la VaR prend une valeur positive, s'agissant d'une perte).

$$\widehat{VaR}(p)_{t,t+1} = Z_{1-p} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{X_t^i}{V_t} \frac{\partial V}{\partial X^i}(X_t^1, \dots, X_t^n) \right) \Sigma_t^{i,j} \left(\frac{X_t^j}{V_t} \frac{\partial V}{\partial X^j}(X_t^1, \dots, X_t^n) \right)}$$

$$\widehat{VaR}(p)_{t,t+1} = Z_p \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{X_t^i}{V_t} \frac{\partial V}{\partial X^i}(X_t^1, \dots, X_t^n) \right) \Sigma_t^{i,j} \left(\frac{X_t^j}{V_t} \frac{\partial V}{\partial X^j}(X_t^1, \dots, X_t^n) \right)}$$

En utilisant l'analogie qui subsiste entre cette écriture et les notations utilisées dans le pricing des options nous pouvons récrire cette expression :

$$\widehat{VaR}(p)_{t,t+1} = Z_p \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{X_t^i}{V_t} \Delta^i\right) \Sigma_t^{i,j} \left(\frac{X_t^j}{V_t} \Delta^j\right)} \quad \text{Avec, } \Delta = \nabla V(X_t^1, \dots, X_t^n)$$

Si nous considérons un portefeuille d'actions avec les proportions $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ investies respectivement dans les actions 1, \dots , n, alors la quantité $\frac{X_t^i}{V_t} \frac{\partial V}{\partial X^i}(X_t^1, \dots, X_t^n)$ est tout simplement le poids α^i et l'estimation de la VaR devient :

$$\widehat{VaR}(p)_{t,t+1} = Z_p \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \alpha^i \alpha^j \Sigma_t^{i,j}}$$

Pour le besoin d'illustration de la démarche, le portefeuille considéré contient uniquement des actions, ce qui fait de l'approche Delta-Normal une approximation commode, surtout que les hypothèses émises quant à la distribution satisfont les données utilisées. Toutefois, cette approximation est beaucoup moins exacte si le portefeuille contient des actifs à comportement non linéaire. Pour considérer un cas intuitif, supposons que nous disposons d'un portefeuille d'options couvert en Δ (*Delta hedged*), c'est à dire qu'il contient une option sur un sous-jacent, et une position sur le sous-jacent lui-même. Dans le cadre linéaire (sans prendre en considération les autres *Grecks*), ce portefeuille est censé produire un rendement sans risque. En procédant à une approximation par la méthode Delta-Normal, la VaR estimée sera donc nulle. Cette méthode présente donc dans ce cas un résultat complètement faux.

Chemin faisant, une approche plus commode a été développée pour prendre en compte les comportements non linéaires de certains types d'instruments d'investissement. En l'occurrence, il s'agit de l'approche Delta-Gamma-Normal et Delta-Gamma-Thêta-Normal. Ces approches ne font pas partie de la méthodologie originale de *RiskMetrics*TM, mais Zangari (1996)⁴², travaillant au service de *RiskMetrics*, a proposé cette famille d'approches dite quadratique.

⁴² P. Zangari. A var methodology for portfolios that include options. *RiskMetrics Monitor*, 1:4–12, 1996.

II.1.4.3. L'approche Delta-Gamma-(Thêta)- Normale :

Pour aller au-delà des modèles linéaires et trouver de meilleures approximations de la VaR, il faut développer davantage l'expansion de Taylor. Si nous considérons les deux premiers termes qui surviennent suite à un changement dans le facteur de risque nous aurons :

$$V(X_{t+1}^1, \dots, X_{t+1}^n) \simeq V(X_t^1, \dots, X_t^n) + \Theta x_1 + \sum_{i=1}^n \Delta^i r_{t,t+1}^i X_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \Gamma^{ij} X_t^i X_t^j r_{t,t+1}^i r_{t,t+1}^j$$

Avec

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \Delta^i = \frac{\partial V}{\partial X^i}, \quad \Gamma^{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial X^i \partial X^j}$$

le terme Θx_1 prend en compte l'évolution de la valeur du portefeuille dans le temps (comme c'est le cas par exemple le cas pour la valeur temps d'une option ou l'effet *Pull to Par* pour une obligation à prime ou à décote) est généralement négligé dans le calcul de la VaR puisque l'horizon est généralement très petit (1 jour).

En ignorant donc le thêta, l'expression de l'approximation du rendement du portefeuille selon l'approche Delta-Gamma devient :

$$R \simeq \tilde{R} = \sum_{i=1}^n \frac{X_t^i}{V_t} \Delta^i r_{t,t+1}^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{X_t^i X_t^j}{V_t V_t} (V_t \Gamma^{ij}) r_{t,t+1}^i r_{t,t+1}^j$$

D'où pour utiliser la VaR en utilisant cette approximation, nous avons à calculer le quantile d'une distribution qui n'est plus gaussienne désormais. Il faut noter que, malgré le fait que les facteurs de risque exhibent une moyenne de rendement nulle, l'approximation du rendement du portefeuille \tilde{R} affiche une moyenne non nulle correspondant au terme Γ , une variance différente, une distribution qui peut être asymétrique c'est à dire un Skewness $\neq 0$ et un Kurtosis (4^{ème} moment de la distribution) différent de 3, ce qui nous donne une idée quantifiée sur le degré de l'épaisseur des queues de la distribution.

Un problème dès lors surgit, comment approximer les quantiles de la distribution d'une variable aléatoire qui est en fait une variable polynomiale quadratique gaussienne ?

Une littérature importante dans le contexte financier a été développée autour de cette problématique afin de calculer la VaR d'un portefeuille quadratique.

En ignorant le facteur thêta, nous parlerons à partir de maintenant de l'approche Delta-Gamma-Normale. Cette approximation consiste, en tenant compte de l'hypothèse de la normalité con-

ditionnelle telle qu'avancée dans le document technique de *RiskMetrics*, à approximer la distribution de rendement d'un portefeuille d'une variable gaussienne polynomiale quadratique multivariée. Il s'agit de \tilde{R} , telle que :

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^n \frac{X_t^i}{V_t} \Delta^i r_{t,t+1}^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{X_t^i X_t^j}{V_t V_t} (V_t \Gamma^{ij}) r_{t,t+1}^i r_{t,t+1}^j$$

Plusieurs méthodes ont été développées pour approximer les quantiles d'une telle distribution. Nous allons présenter brièvement quelques-unes à titre indicatif, puisque certaines d'entre elles ne sont bien valables que d'un point de vue théorique pour le moment, pour nous focaliser en fin de compte sur l'une des approches les plus réalisables en termes pratique.

II.1.4.3.1. L'approximation gaussienne :

Cette méthode a été présentée plus haut avec un exemple illustratif. Le recours à cette méthode pour traiter la distribution de \tilde{R} et la détermination du quantile de la distribution gaussienne adaptée. Cette méthode débouche sur une approximation de la VaR impliquant les 2 premiers moments de la distribution de \tilde{R} .

Si nous considérons $\tilde{\Delta}^i = \frac{X_t^i}{V_t} \Delta^i$ et $\tilde{\Gamma}^{ij} = \frac{X_t^i X_t^j}{V_t V_t} (V_t \Gamma^{ij})$, $\tilde{\Delta}^i$ et $\tilde{\Gamma}^{ij}$ étant respectivement le vecteur et la matrice associés, alors nous pouvons très bien voir que la moyenne et la variance des rendements d'un portefeuille quadratique sont :

$$\mu = \mathbb{E}[\tilde{R}] = \frac{1}{2} Tr(\tilde{\Gamma}\Sigma)$$

Et
$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(\tilde{R} - \mathbb{E}[\tilde{R}])^2] = \tilde{\Delta}'\Sigma\tilde{\Delta} + \frac{1}{2} Tr((\tilde{\Gamma}\Sigma)^2)$$

d'où, l'idée sous-jacente de cette approximation est de faire correspondre une distribution gaussienne aux paramètres (μ, σ) et d'en déduire par la suite un estimateur pour le quantile en question.

La forme usuelle pour estimer la VaR est :

$$\widehat{VaR}(p)_{t,t+1} = -\mu - \sigma Z_{1-p}$$

$$\widehat{VaR}(p)_{t,t+1} = -\mu + \sigma Z_p$$

Cette approximation est quelque peu rudimentaire et d'autres approximations plus judicieuses intégrant des moments supérieurs ont été proposées.

II.1.4.3.2. L'approximation de la transformation de Johnson :

Elle consiste à choisir une distribution faisant partie des distributions de la famille Johnson afin de trouver une concordance avec les 4 premiers moments de \tilde{R} . L'avantage de la famille de distributions de Johnson est que leurs quantiles dépendent seulement des quantiles d'une variable aléatoire normale standard.

II.1.4.3.3. L'approximation de Solomon-Stephens :

\tilde{R} peut être démontré comme étant une combinaison linéaire de variables aléatoires χ^2 non – centrées indépendantes. Certains auteurs⁴³, sur la base de l'article de base de Solomon et Stephens (1977)⁴⁴, ont proposé une approximation de ces variables (χ^2 non – centrées) sur la base d'une variable $K_1X^{K_2}$, où, K_1 et K_2 sont 2 constantes, et X une variable aléatoire qui suit une distribution χ^2 avec un degré de liberté qui reste toutefois à déterminer.

II.1.4.3.4. L'approximation de Saddle Point :

En recourant à la possibilité de représenter \tilde{R} en tant qu'une somme de polynômes de 2nd degré de variables aléatoires normales indépendantes. Cette méthode commence par déterminer l'expression analytique de la fonction génératrice des moments. Puis, en utilisant la fonction génératrice des cumulants, une approximation Saddle Point est utilisée pour approximer la fonction des queues de la distribution de \tilde{R} et en déduire par la suite la VaR.

II.1.4.3.5. L'approximation basée sur la VaR en composante principale (PCVaR) :

Introduite par Brummelhuis et al (2002)⁴⁵, cette approche (non élaborée pour des portefeuilles à $\Gamma > 0$ à la base mais qui reste tout de même valable, du moins à court terme, tant que l'approximation quadratique est valable) consiste en une approximation de forme fermée de la fonction de distribution cumulative. Cette approximation, ainsi que ses bornes inférieures et

⁴³ M. Britten-Jones and S.M. Schaefer. Non-linear value-at-risk. European Finance Review, 2(2):161, 1999.

⁴⁴ H. Solomon and Stephens M. A. Distribution of a sum of weighted chi-square variables. Technical report, 1977.

⁴⁵ R. Brummelhuis, A. Cordoba, M. Quintanilla, and L. Seco. Principal component value at risk. Mathematical Finance, 12(1):23–43, 2002.

supérieures dans certains cas, est basée sur une approximation asymptotique des intégrales pour fonctions quadratiques.

II.1.4.3.6. L'approximation via la transformée de Fourier :

Suivant Albanese et al (2004)⁴⁶, la fonction caractéristique de \tilde{R} peut être trouvée analytiquement en utilisant une représentation de \tilde{R} en tant que la somme de variables aléatoires χ^2 non-centrées. D'où, en recourant à la transformée rapide de Fourier, nous pouvons revenir à la fonction de distribution de probabilité de \tilde{R} et donc la fonction de la queue et à la VaR.

II.1.4.3.7. L'approximation par la simulation Monte Carlo partielle :

Le recours à cette méthode permet d'estimer le quantile nécessaire au calcul de la VaR. Cette méthode n'est pas paramétrique, toutefois, il ne s'agit pas non plus de la méthode Monte Carlo pure, puisqu'il n'est pas nécessaire de recalculer la valeur du portefeuille après chaque tirage des facteurs de risque. Cette méthode est donc seulement utilisée afin de calculer le quantile de l'approximation paramétrique du rendement \tilde{R} , en l'occurrence, Delta-Gamma.

II.1.4.3.8. L'approximation de Cornish-Fisher :

Cette méthode permet le calcul du quantile d'une variable gaussienne polynômiale multivariée. En recourant à cette approximation, nous pouvons évaluer les quantiles d'une variable aléatoire en utilisant ses propres moments et les quantiles d'une variable gaussienne standard. En d'autres termes, c'est une relation approximative entre la distribution d'une variable et ses moments, en se basant notamment sur les séries de Taylor. Hull (2000)⁴⁷ a utilisé cette approximation mais s'était arrêté au 3^{ème} moment de la distribution bien que l'expansion de Cornish-Fisher prend en compte tous les moments d'une distribution. D'autant que le 4^{ème} moment est crucial pour le concept de la VaR, puisqu'il s'agit de détecter le caractère platicurtique, méso-kurtique ou leptokurtique de la distribution (généralement les séries financières exhibent ce dernier caractère) et donc l'épaisseur des queues de la distribution.

⁴⁶ C. Albanese, K. Jackson, and P. Wiberg. A new fourier transform algorithm for value-at-risk. *Quantitative Finance*, 4(3):328–338, 2004

⁴⁷ J.C. Hull (2000), *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, Upper Saddle River, chapitre 14.

Ces quatre 1^{ers} moments sont donnés par :

$$\mu = \mathbb{E}[\tilde{R}]$$

$$\sigma^2 = \mathbb{E} \left[(\tilde{R} - \mathbb{E}[\tilde{R}])^2 \right]$$

$$s = \frac{\mathbb{E} \left[(\tilde{R} - \mathbb{E}[\tilde{R}])^3 \right]}{\sigma^3}$$

Et enfin,

$$k = \frac{\mathbb{E} \left[(\tilde{R} - \mathbb{E}[\tilde{R}])^4 \right]}{\sigma^4} - 3$$

Respectivement, la moyenne, la variance, le Skewness (coefficient de symétrie de la distribution) et le Kurtosis (coefficient d'aplatissement) de la variable aléatoire \tilde{R} .

Pour utiliser les mêmes notations que tout à l'heure, les expressions du Skewness et du Kurtosis nous aurons :

$$s = \frac{1}{\sigma^3} [3\tilde{\Delta}'\tilde{\Sigma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Sigma}\tilde{\Delta} + Tr((\tilde{\Gamma}\tilde{\Sigma})^3)]$$

$$k = \frac{1}{\sigma^4} [12\tilde{\Delta}'\tilde{\Sigma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Sigma}\tilde{\Gamma}\tilde{\Sigma}\tilde{\Delta} + 3Tr((\tilde{\Gamma}\tilde{\Sigma})^4)]$$

L'expression de la VaR devient alors selon cette méthode :

$$\widehat{VaR}(p)_{t,t+1} = -\left(\mu + \sigma \left(Z_{1-p} + (Z_{1-p}^2 - 1) \frac{s}{6} \right) + (Z_{1-p}^3 - 3Z_{1-p}) \frac{k}{24} - (2Z_{1-p}^3 - 5Z_{1-p}) \frac{s^2}{36} \right)$$

$$\widehat{VaR}(p)_{t,t+1} = -\mu + \sigma \left(Z_p + (Z_p^2 - 1) \frac{s}{6} \right) + (Z_p^3 - 3Z_p) \frac{k}{24} - (2Z_p^3 - 5Z_p) \frac{s^2}{36}$$

Cette expression peut être vue alors comme une inversion de l'expansion de Edgeworth ce qui permet de calculer le moment de n'importe quel ordre, et non seulement les usuels. (Ce dernier dérive la fonction génératrice des cumulants à partir de la fonction génératrice des moments en faisant un passage logarithmique).

Il est à noter qu'en n'utilisant que les 2 premiers moments nous retrouvons une distribution de \tilde{R} adaptée à la loi normale.

Cette technique a été testée⁴⁸ en recourant à différents nombres de moments. Il se trouve que son avantage majeur, en plus de sa robustesse, soit sa rapidité. En effet, pour utiliser cette méthode, il suffit de calculer les premiers moments de \tilde{R} . D'un point de vue pratique, après avoir déterminé Δ et Γ pour le portefeuille en question, la problématique se résume au calcul des différents moments, pour lesquels, les expressions analytiques sont disponibles. En termes de complexité d'opérations, il s'agit de sommes et de produits matriciels dont les dimensions sont définies par le nombre des facteurs de risque.

II.1.4.3.8.1. Limites de l'approche Cornish-Fisher :

Cette approche présente, du moins d'un point de vue théorique, un problème de monotonie. En d'autres termes, pour certaines valeurs de Skewness et de Kurtosis, et bien que ces valeurs ne soient pas valables d'un point de vue pratique, le polynôme n'est pas monotone. Conséquemment, nous pouvons avoir théoriquement des VaR (95%) > à des VaR (99%). Même si cette situation serait très peu envisageable en pratique, la monotonie de cette approximation reste tout de même une limite.

Par ailleurs, cette approximation n'augmente pas en précision quand nous rajoutons des moments supérieurs. Ceci serait dû à l'expansion d'Edgeworth sous-jacente qui pourrait ne pas être convergente pour toutes les distributions envisagées.

Enfin, un fait important à mentionner serait la non-pertinence de l'approche de la méthode pour les quantiles les plus élevés (99,9% par exemple). En effet, cette approche consiste à approximer le quantile de \tilde{R} en recourant à une forme polynomiale de n degré du quantile d'une variable normale standard. En termes mathématiques, l'approximation de la variable aléatoire \tilde{R} de la forme $P(N)$ où P est un polynôme de degré n qu'on suppose être croissant, et N une variable aléatoire normale standard. Dès lors la fonction de distribution de probabilité de \tilde{R} est approximée par une autre de la forme :

$$\frac{1}{P'(P^{-1}(x))} \frac{e\left(-\frac{p^{-1}(x)^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}$$

⁴⁸ S.R. Jaschke. The cornish-fisher expansion in the context of delta-gamma-normal approximations. Journal of Risk, 4:33–52, 2002. Et S. Pichler and K. Selitsch. A comparison of analytical var methodologies for portfolios that include options. Model risk, concepts, calibration, and pricing, 2000.

D'où, l'approximation de Cornish-Fisher dépend fortement du degré de P, et pourrait ne pas être exacte pour les queues de la distribution.

II.2. La simulation historique :

Initiée par Cabedo et Moya (2003b)⁴⁹, cette approche non-paramétrique a été développée afin de déterminer la VaR des mouvements quotidiens des prix du pétrole pour la période entre 1992 et 1998. Il est à noter que dans l'approche originelle, puisque la simulation est entièrement basée sur les données historiques, aucune hypothèse n'est émise concernant la distribution des facteurs de risque, ainsi c'est la distribution empirique qui est prise en compte. Par ailleurs, les auteurs ont séparé les rendements positifs et négatifs, permettant ainsi la prise en compte d'un effet asymétrique de la distribution. En raison de sa simplicité, l'approche historique pour calculer la VaR fut la plus répandue dans le monde professionnel. Cette approche a été utilisée dans un premier temps dans sa version la plus basique. Mais suite aux limites de ses hypothèses simplistes, différentes améliorations ont été apportées par la sphère académique pour remédier à celles-là. Nous rapporterons à la fin de cette partie les développements les plus éminents qui ont été faits dans ce sens.

II.2.1. Méthodologie de l'approche :

Pour la décrire d'une façon intuitive, quoique non exempte d'un certain cynisme, cette méthode consiste à « rejouer » le passé pour prévoir le futur. En d'autres termes, les évolutions passées des facteurs de risque auront à se reproduire dans le futur, et c'est ainsi que la valeur future du portefeuille sera calculée.

Étapes de l'approche :

1. Il faut choisir un certain nombre de facteur de risque X^1, \dots, X^n , et ce pour pouvoir établir l'évolution de la valeur des actifs qui composent le portefeuille, et ainsi le portefeuille lui-même.
2. Une fois la première étape assurée, il faut passer à la seconde étape qui est le cœur même de cette approche. Il s'agit de considérer la distribution empirique des pertes ou des pertes & profits (*P&L*) du portefeuille pour un horizon temporel déterminé.

⁴⁹ Cabedo J. David, Moya Ismael, 2003. Estimating oil price value-at risk using historical simulation approach. *Energy Economics* 25, 239–253.

Explicitement, et en gardant en vue l'hypothèse de l'indépendance des tirages, la série chronologique historique des $P\&L$ $(P_{s,s+1})_s \in [t-T, t-1]$ est exprimée ainsi :

$$P_{s,s+1} = V(X^l_{s+1}, \dots, X^n_{s+1}) - V(X^l_s, \dots, X^n_s)$$

Ainsi la distribution empirique des $P\&L$, et symétriquement, celle des pertes, consiste en ces observations pour un horizon temporel donné, $s \in [t-T, t-1]$, où t est la période actuelle, et T la longueur de la période considérée.

Plus précisément, dans la plupart des simulations historique, la distribution empirique cumulative G de $(P_{s,s+1})_s \in [t-T, t-1]$:

$$G(z) = \frac{1}{T} \sum_{s=1-T}^{t-1} 1_{P_{s,s+1} \leq z}$$

3. La dernière étape consiste à estimer le quantile correspondant à la VaR désirée. Ceci peut être effectué par le calcul direct du quantile $(1-q)$ de la distribution empirique G , où encore, en recourant d'autres méthodes non-paramétriques telles que le bootstrap ou la théorie des valeurs extrêmes.

II.2.2. Limites de l'approche :

- **Le passé n'est pas forcément le meilleur estimateur du futur :**

Bien que toutes les approches reposent sur les données sur le passé, l'approche historique se base entièrement sur lui en calculant la VaR directement à partir des valeurs passées des facteurs de risque. Il est vrai, par ailleurs, que ceci évite à l'utilisateur d'émettre des hypothèses sur la distribution de rendement du portefeuille (approches paramétriques), ou encore d'imposer des informations subjectives (le cas de l'approche Monte Carlo). Toutefois, pour revenir à l'article de Cabedo et Moya (2003b), un opérateur sur le pétrole qui aurait basé son calcul de la VaR sur les données de l'échantillon de l'article en question, à savoir, entre 1992 et 1998, aurait eu à faire face à des pertes beaucoup plus importantes que prévues durant l'augmentation de la volatilité des prix entre 1999 et 2004 par exemple.

- **Les tendances du marché :**

L'approche historique suppose que toutes les observations passées ont la même importance lors du calcul de la VaR. En d'autres termes, des observations datant de 1992 affecterait la VaR de

la même façon que les données de 1998. Cette hypothèse centrale de l'approche historique pose problème du moment qu'elle néglige les faits stylisés des innovations du processus des facteurs de risque (autocorrélation, régime et concentration de volatilité...). En effet, toute innovation est supposée apporter une information nouvelle concernant les conditions du marché. Une dernière remarque que nous pouvons émettre, c'est le choix de la fenêtre temporelle depuis laquelle les données seront tirées, il est certain qu'une VaR calculée sur la base d'un horizon qui inclut une crise financière ne sera pas la même que par ailleurs.

- **Apparition de nouveaux actifs ou de nouveaux risques :**

Quoique cette critique puisse être rapportée aux différentes méthodes de calcul de la VaR, l'approche historique est la moins à même de combler cette carence du fait qu'elle est historique *ipso facto*. L'histoire financière est pleine d'exemple de ce phénomène. Libéralisation des taux de change, financiarisation et dé-financiarisation de l'or, crise pétrolière, apparition de l'économie du numérique...

Pour conclure, il est vrai que l'approche historique soulage son utilisateur du fardeau des hypothèses à émettre quant aux distributions des différents facteurs de risque, mais symétriquement que le futur est d'une certaine façon recommencement du passé, même si ce passé inclut des événements extrêmes. Cette hypothèse est difficilement défendable dans un environnement où les risques sont volatils et où des changements structurels peuvent survenir à tout moment.

II.2.3. Extensions dans la littérature :

- **Surpondérer le passé le plus récent :**

Boudoukh et al (1998)⁵⁰ ont présenté une variante de la simulation historique où ils accordent plus d'importance aux données récentes en utilisant un facteur de pondération donné. Cette extension, appelée communément BRW, au lieu de donner le même poids à toutes les données historiques, accorde plus d'importance aux observations les plus récentes. L'article de référence s'est basé sur des observations immédiatement subséquentes au crash d'octobre 1987. Alors que l'approche standard n'affichait pas au lendemain du crash un changement de la VaR puisqu'elle lui accorde la même pondération que toutes les autres observations, la VaR selon l'approche de BRW s'est très vite ajustée par rapport à cette innovation et a reflété la taille du crash.

⁵⁰ Boudoukh, J., M. Richardson and R. Whitelaw, 1998. "The Best of Both Worlds," Risk, v11, 64-67.

- **Combiner la simulation historique aux modèles de séries temporelles :**

Dans l'article de base qui avait introduit la simulation historique (voir ci-haut), les auteurs ont suggéré le recours aux modèles de séries temporelles pour ajuster la VaR de manière à inclure les innovations du processus de la VaR. En effet, c'est un modèle ARMA qu'ils ont proposé afin d'établir une prévision à degré de significativité de 99%. Il s'en est suivi une VaR bien mesurée à 98.8% contre 97,7% suivant l'approche non ajustée. Ceci est dû à la sensibilité du modèle au changement de la variance du prix de pétrole.

- **L'incorporation du régime de volatilité :**

Hull et White (1998b)⁵¹ ont suggéré différentes méthodes pour incorporer les effets de changement de régime de la volatilité dans l'approche de simulation historique. Pour les actifs qui exhibent une volatilité actuelle plus importante que l'historique, ils ont proposé un ajustement par un facteur scalaire. Ledit facteur n'est que le rapport entre ces dernières. Par exemple, si la volatilité actuelle est de 0,9% alors que celle des derniers 20 jours n'est que de 0,6%, le facteur scalaire sera de 1.5. Un rendement de 1% durant cette journée sera tout simplement porté à 1.5%. Toutefois, leur approche requiert une estimation de la volatilité actuelle qui est désormais stochastique. Pour ce faire, les auteurs ont eu recours dans leur article à une modélisation GARCH.

Notons que toutes ces extensions ont traité le problème de la pondération des observations de l'approche classique. Mais aucune d'elles n'a proposé une solution afin de prendre compte les risques non envisagés dans l'horizon historique choisi pour établir la simulation (une crise qui peut se reproduire par exemple, du moins en termes d'ampleur). Enfin, le fait qu'il y ait possiblement des changements structurels dans les fondamentaux du marché ou économique, ce qui biaise les résultats, n'a lui aussi, pas vu de remède dans le cadre de cette approche, et des pistes de recherche sont toujours d'actualité dans ce sens.

II.3. L'approche de simulation Monte-Carlo :

La seconde approche non-paramétrique pour estimer la VaR est la simulation Monte Carlo. En plus de la méthodologie classique qui consiste à déterminer un quantile donné à partir de la distribution des rendements d'un portefeuille, cette approche permet aussi de se focaliser sur la probabilité de perte excédant un certain seuil au lieu de considérer toute la distribution.

⁵¹ Hull, J. and A. White, 1998, Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk, *Journal of Risk*, v1, 5-19.

II.3.1. Description de la méthode :

Les deux premières étapes sont les mêmes que celles de l'approche paramétrique Variance-Covariance qui consistent à identifier les facteurs de risque de marché qui affectent les actifs du portefeuille et de les convertir en des instruments standards. En effet, la différence réside dans la troisième étape. Au lieu de calculer les variances et covariances entre les facteurs de risque à partir des données disponibles, c'est un processus de simulation qui est établie, où la distribution de chaque facteur de risque est spécifiée, ainsi que la structure de dépendance qui fait que ces facteurs évoluent conjointement. L'avantage majeur de cette approche est qu'elle permet à son utilisateur de supposer une distribution alternative à la normale. De plus, elle permet de faire des modifications et des ajustements additionnels selon les jugements subjectifs de l'utilisateur.

Une fois les distributions et les structures de dépendance spécifiées, le processus de simulation prend lieu. À chaque pas, les variables simulées prennent des valeurs qui permettent de calculer la valeur du portefeuille. Ce processus itératif est répété un nombre considérable de fois (au minimum 10 000 fois), surtout que la vitesse de convergence des paramètres selon cette approche est faible. Ainsi, pour 10 000 simulations, après avoir été classées dans un ordre croissant, la VaR (99,9%) consiste à la 10^{ème} plus petite valeur (10^{ème} plus grande perte).

Pour illustrer formellement cette méthode, l'approche Monte Carlo la plus basique consiste à adapter une distribution de probabilité f aux facteurs de risque identifiés. Ceci est faisable en procédant un M tirages de nouvelles valeurs des facteurs de risque $(X_{t+1}^1, \dots, X_{t+1}^n)$ qui seront notés :

$$(X_{t+1}^{1,m}, \dots, X_{t+1}^{n,m}) \text{ avec } 1 \leq m \leq M$$

Ensuite, sur la base de ces tirages, une évaluation du portefeuille est établie pour chaque simulation m . Les $P\&L$ seront donc calculés selon la formule suivante :

$$P_{t,t+1}^m = V(X_{t+1}^{1,m}, \dots, X_{t+1}^{n,m}) - V(X_t^1, \dots, X_t^n)$$

C'est ce processus en fait qui est chronophage et qui constitue la lourdeur principale de cette méthode. Une fois cette étape accomplie, le quantile visé est déterminé à partir de la distribution

empirique des $P\&L$, en l'occurrence les $P^m_{t,t+1}$. Une autre manière de déterminer le quantile visé est de recourir à la théorie des valeurs extrêmes. Par ailleurs, dans le cas de détermination d'un quantile empirique, il s'agit d'établir une simulation Monte Carlo afin d'estimer une moyenne de la forme $\mathbb{P}(P \leq z) = \mathbb{E}(1_{(P \leq z)})$ où P est la variable aléatoire qui prend les $P\&L$.

II.3.2. Évaluation de l'approche :

Cette approche consiste en une simulation selon des paramètres et des hypothèses sur les distributions des facteurs de risque, ainsi que sur la structure de dépendance entre ces facteurs. Il en résulte alors que les résultats ne peuvent jamais dépasser les hypothèses émises, et donc les limites imposées selon le jugement de l'utilisateur, quoique certains utilisateurs aient recours aux données historiques pour déterminer les distributions à supposer.

Par ailleurs, plus le nombre des facteurs de risque augmente, plus la structure de leurs dépendances devient complexe, et plus la simulation Monte Carlo devient difficile, lourde et chronophage.

Pour finir, la puissance de cette approche peut être vue en contraste avec les autres approches. En effet, contrairement à l'approche paramétrique classique (sans extension ni modèles d'approximation) qui se base sur des hypothèses non réalistes, notamment la normalité des processus des facteurs de risque, la simulation Monte Carlo permet de recourir à d'autres distributions afin de déterminer les quantiles visés. Par rapport à l'approche historique maintenant, il est vrai que la simulation Monte Carlo commence recourt aux données historique aussi, toutefois elle est plus permissive, donnant la possibilité d'apporter des modifications sur la base de jugements subjectif et d'informations permettant une meilleure prévision des distributions de probabilité. En dernier lieu, cette approche est très bien adaptée aux portefeuilles complexes comportant des actifs complexes, tels que les options et les *Callable/Puttable Bonds*.

II.3.3. Extensions dans la littérature :

Les travaux de recherche qui ont traité la simulation Monte Carlo se sont généralement intéressés à sa lourdeur computationnelle. En effet, pour en donner un exemple, si nous considérons 15 taux d'intérêts (facteurs de risque) qui constituent une courbe de taux donnée, qui prennent chacun 4 valeurs possibles, pour effectuer une simulation complète il faudrait 4^{15} pas, c'est à

dire 1 073 741 824 itérations. D'où, des techniques de réduction de nombre de simulation ont été développées.

- **Simulation de scénarios :**

Un des moyens de réduire la lourdeur de la mise en place de la simulation Monte Carlo est définir des scénarios discrets pour lesquels la simulation sera établie.

Fry (1997)⁵² a suggéré une approche qui peut être utilisée pour développer un certain nombre pré spécifié de chocs qui va vont être appliqué au système analysé.

De leur côté, Jamshidan et Zhu (1997)⁵³ ont suggéré de commencer par rétrécir le nombre de facteurs de risque en recourant à l'analyse en composante principale effectuée sur les données historiques. Au lieu donc, de laisser chaque facteur de risque prendre toutes les valeurs potentielles, c'est seulement une combinaison de ces facteurs qui prendra les valeurs des scénarios pour arriver à la simulation visée

- **Modification sur la base de la méthode Variance-Covariance :**

Le principal attrait de l'approche Variance-Covariance est sa rapidité. En effet, si la distribution de la probabilité est supposée normale, la VaR d'un portefeuille est obtenue en quelques minutes. Par ailleurs, la simulation Monte Carlo est très flexible, puisqu'elle permet différentes hypothèses quant aux distributions des facteurs de risque, par contre elle est lourde à établir. Glasserman et al (2000)⁵⁴ ont proposé une technique qui utilise l'approximation de la méthode paramétrique pour guider le processus d'échantillonnage de la simulation Monte Carlo. Grâce à cette technique ils ont pu apporter un gain de temps substantiel sans aucune perte de précision. C'est donc un gain en termes d'exigence de calcul tout en gardant la puissance et la précision de la méthode Monte Carlo.

⁵² Frye, J., 1997, "Principals of Risk: Finding Value-at-Risk Through Factor-Based Interest Rate Scenarios." NationsBanc-CRT.

⁵³ Jamshidian, Farshid and Yu Zhu, 1997, "Scenario Simulation: Theory and Methodology." Finance and Stochastics, v1, 43-67.

⁵⁴ Glasserman, P., P. Heidelberger and P. Shahabuddin, 2000, Efficient Monte Carlo Methods for Value at Risk, Working Paper, Columbia University.

Conclusion :

Nous avons pu dans cette partie introduire le concept de la *Value at Risk*, son origine, ses forces et faiblesses, ainsi que les différentes approches pour son calcul, à savoir les différentes approches paramétriques, et non paramétriques ou encore semi-paramétriques. Nous avons vu, que la VaR est un concept qui associe, et les distributions de probabilité, et les mesures de volatilité. Le souci est que, dans le monde des praticiens, les distributions ne sont pas normales, les quantiles sont donc difficiles à appréhender. La même difficulté se retrouve avec la volatilité qui n'est pas constante dans le temps. Indiquons au passage que la volatilité réalisée n'est malheureusement pas observable. De ce fait, une approximation exacte de ces 2 paramètres est essentielle au calcul de la VaR. C'est justement l'objet du 3^{ème} chapitre de ce mémoire qui vise à présenter une approche qui pallie aux difficultés énumérées en prenant en compte, et la dimension probabiliste, essentielle pour la mesure des risques extrêmes, et la dimension de la volatilité, pierre angulaire du calcul des risques et pilier des décisions d'investissement et de gestion d'actifs.

Chapitre III :

Application empirique sur des titres à revenus fixes US

Introduction :

Dans ce chapitre nous avons fait la jonction de tout ce qui a été présenté dans les 2 chapitres précédents. En effet, nous avons procédé au calcul de la VaR et à la construction de portefeuilles politiques, abordés respectivement dans le second et le premier chapitre du présent travail. Par ailleurs, nous avons introduit dans ce chapitre les différents modèles de volatilité auxquels nous avons eu recours afin d'estimer correctement ladite volatilité. Ceci a été fait en accord avec les concepts probabilistes présentés plus haut. Nous avons, donc, sélectionné certains benchmarks de titres à revenus fixes afin de conduire nos différentes estimations. En effet, dans ce chapitre nous avons considéré les points les plus importants soulevés plus haut, à savoir, une appréhension correcte du risque, et une approche dynamique qui permette à l'investisseur d'avoir une position plus au moins flexible pour qu'il puisse s'ajuster en temps opportun. Cet ajustement peut être considéré en tant qu'une opportunité à saisir, ou une menace à éviter. C'est ce dernier cas qui nous importe le plus, du fait même que l'allocation stratégique d'actifs est une approche qui vise à suggérer à l'investisseur une composition politique qui va en accord avec ses contraintes et son profil de risque. Or, l'on sait pertinemment que la réalité des marchés évolue d'une période à l'autre. De ce fait, un suivi adéquat doit être effectué aux moyens d'une démarche qui soit solide et stable, deux facteurs essentiels pour qualifier de réaliste quelque approche que ce soit.

I. Présentation et analyse pré-estimation de l'échantillon :

Pour l'étude empirique de ce travail nous avons sélectionné 9 Benchmarks largement reconnus et utilisés par les praticiens, en l'occurrence ceux de *Merrill Lynch Bank of America*. 5 de ces benchmarks visent les titres gouvernementaux, ou encore, "sovereign" libellés en USD. Ils couvrent les segments de maturité allant de 0 à 10 ans sur la courbe des taux par termes US. Les 4 autres visent un univers plus large afin de pouvoir tirer avantage des effets de diversification lors de la construction de portefeuilles. Il s'agit de benchmarks qui procurent une exposition sur des produits plus risqués ou moins liquides que les titres gouvernementaux, ou encore qui visent une exposition sur le taux d'intérêt réel (des produits liés à l'inflation).

L'échantillon est composé de 164 observations mensuelles de rendements, fournies par la banque centrale de Tunisie à partir de la base de données Bloomberg et couvre une période d'étude qui s'étale de février 2004 à septembre 2017.

Nous avons par ailleurs laissé de côté 13 observations hors échantillon afin de pouvoir juger la qualité de prévision des modèles estimés. De ce fait, 151 observations ont été utilisées pour l'estimation des modèles.

Nous avons utilisé aussi, quoique d'une façon marginale, la courbe des taux spot US pour la même période indiquée et à partir de la même source.

Tableau 1 : Récapitulatif des Benchmarks

Benchmark	Ticker	Description
US Govt 0-1Y	G0QA	Ces benchmarks offrent une exposition sur le risque du trésor américain selon la maturité. Ensemble ils offrent une exposition sur les rendement des titres du trésor américain sur des maturités allant de 0 à 10 ans sur la courbe des taux US, en la divisant en autant de segments que leur nombre.
US Govt 1-3Y	G1O2	
US Govt 3-5Y	G2O2	
US Govt 5-7Y	G3O2	
US Govt 7-10Y	G4O2	
US TIPS1-5Y	GVQI	Ce benchmark représente le rendement sur le taux d'intérêt réel de la dette gouvernementale. Il offre une couverture contre l'inflation grâce à l'ajustement périodique du principal et du coupon des titres qui y sont inclus par l'IPC.
US Agency 1-3Y	G1P0	Ce benchmark représente le rendement des agences gouvernementales américaines, hormis le trésor et les municipalités.
US MBS Master	M0A0	Ce benchmark suit la performance des crédits résidentiels US à taux fixes émis par des entreprises sponsorisées par le gouvernement US (ex. Ginnie Mae, Freddie Mac...).
US Corp AAA 1-3Y	C1A1	Ce benchmark représente le rendement de la dette des entreprises US notées AAA avec une maturité restante entre 1 et 3 ans.

Tableau 2: Durations des benchmarks

	US 0-1Y	US 1-3	US 3-5	US5-7	US7-10	TIPS1-5	Agcy 1-3	MBS	Corp
Moyenne	0,5125	1,8242	3,7679	5,2775	7,2624	2,2254	1,6799	3,6098	1,9621
Médiane	0,5130	1,8700	3,8125	5,5335	7,4960	2,2835	1,6805	3,6790	1,9440
Min	0,4630	1,6310	3,4970	4,3500	6,3620	0,4020	1,4400	1,2300	1,6820
Max	0,5630	1,9370	3,9140	5,6890	7,7500	4,1410	1,8710	5,5730	2,6080
Obs.	164	164	164	164	164	164	164	164	164

Source : Bloomberg, Banque Centrale de Tunisie, notre propre analyse.

La table 2 nous donne une idée la maturité moyenne de chaque benchmark. La duration en tant que mesure de risque déterministe indique le niveau de risque inhérent au mouvement de la courbe des taux supporté par l'investisseur. De ce fait, la duration est une fonction croissante de la maturité moyenne des benchmarks. Par ailleurs, nous avons eu aussi les séries des convexités desdits benchmarks.

1.1. Statistiques descriptives :

Tableau 3: Statistiques descriptives de l'échantillon

	US0-1	US1-3	US3-5	US5-7	US7-10	TIPS 1-5	Agy 1-3	MBS	Corp
Mean	0,0012	0,0017	0,0028	0,0035	0,0040	0,0024	0,0019	0,0034	0,0022
Median	0,0005	0,0013	0,0031	0,0040	0,0034	0,0017	0,0016	0,0028	0,0018
Maximum	0,0079	0,0174	0,0349	0,0549	0,0802	0,0283	0,0186	0,0399	0,0215
Minimum	-0,0005	-0,0096	-0,0282	-0,0331	-0,0425	-0,0567	-0,0092	-0,0174	-0,0299
Std. Dev.	0,0016	0,0037	0,0090	0,0130	0,0177	0,0092	0,0035	0,0074	0,0052
Skewness	1,5594	0,9412	0,1304	0,1211	0,3204	-1,3619	1,3455	0,3988	-0,5519
Kurtosis	5,0283	6,7086	4,6397	4,3483	4,8934	12,8448	8,3604	6,2730	12,9369
Jarque-Bera	94,5797	118,1975	18,8382	12,8236	27,3019	712,9869	245,8346	77,5477	683,0682
Probability	0,0000	0,0000	0,0001	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Obs.	164	164	164	164	164	164	164	164	164

Source : Notre propre analyse avec le logiciel Eviews.

Ce que nous pouvons remarquer de prime abord, c'est la non-normalité de nos séries. En effet, la loi gaussienne présente une skewness et une kurtosis, respectivement de 0 et 3. Pour notre échantillon, tous les coefficients d'asymétrie (skewness) sont différents de 0, et présentent une dissymétrie positive. De plus les coefficients d'aplatissement (kurtosis) sont différents de 3, les distributions des séries étudiées sont donc leptokurtiques et présentent de ce fait des caractéristiques bien spécifiques.

Toutefois, nous allons suivre une démarche plus méthodique, celle développée par Jarque et Bera (1982)⁵⁵. Cette approche a l'avantage de nous indiquer à quel niveau de confiance nous pouvons accepter, ou rejeter, l'hypothèse de normalité.

1.2. Le test de Jarque-Bera :

Nous devons rappeler que l'hypothèse de normalité des termes d'erreur joue un rôle important dans les estimations de modèles de séries temporelles, puisqu'elle permet de préciser la distribution statistique des estimateurs, et de ce fait, détermine notre capacité à les interpréter. Le test Jarque-Bera se base sur l'utilisation de la skewness et de la kurtosis (qui doivent évaluer respectivement 0 et 3 dans le cas de la loi normale). Ce test repose sur le fait que si la distribution suit une loi normale, la statistique de JB doit être inférieure à la valeur de la table Khi-deux à deux degrés de liberté (5.99). Le test Jarque-Bera est un test d'hypothèse qui cherche à déterminer si les données suivent une loi normale ou non. Nous avons :

- H_0 : Les données suivent une loi normale.
- H_1 : Les données ne suivent pas une loi normale.

L'expression de la statistique s'énonce ainsi :

$$JB = \frac{n - k + 1}{6} \left(S^2 + \frac{1}{4} (C - 3)^2 \right)$$

n = Nombre d'observations

k = Nombre de variables explicatives si les données proviennent des résidus d'une régression linéaire. Sinon, $k=0$.

S = Coefficient d'asymétrie de l'échantillon testé.

C = Kurtosis de l'échantillon testé.

Nous pouvons très bien voir dans le tableau 3 que toutes les valeurs calculées du test Jarque-Bera sont largement supérieures à la valeur critique de 5.99 ce qui nous conduit à rejeter l'hypothèse nulle qui teste la normalité des distributions.

⁵⁵ Jarque, C.M. and, Bera A.K, A test for normality of observations and regression residuals, Int. Statistical Review, 55, (1987), 163 – 172.

Par ailleurs, dans le tableau 3, la ligne « probability » indique le niveau de confiance avec lequel nous pouvons accepter H_0 . Ceci indique que les distributions de probabilité des séries étudiées présentent des queues épaisses, ce qui nous renseigne sur la présence de mouvements extrêmes assez fréquents et d'un effet ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) qui sera testé et validé par des tests élaborés à cet effet.

I.3. Stationnarité, racine unitaire et racine explosive

I.3.1. Notion de la stationnarité :

Une série temporelle (chronologique ou chronique) est constituée par une suite ordonnée d'observations X_t , $t = 1 \dots T$.

Les modèles de séries temporelles sont utilisés lorsque nous avons besoin d'effectuer des prévisions à court terme et lorsque les enjeux de cette prévision sont économiquement importants. La méthode d'analyse des séries temporelles consiste à rechercher dans l'historique d'une variable des valeurs susceptibles de prévoir son futur. Pour que cette démarche ait un sens pour la prévision, il est nécessaire que le processus présente une certaine stabilité voire une certaine stationnarité.

Une série temporelle ou un processus stochastique X_t est dit stationnaire si son espérance est constante, sa variance est finie et sa covariance est indépendante du temps :

- $E(X_t) = u$
- $E(X_t^2) < \infty$
- $Cov(X_t, X_{t-s}) = d \quad s = 1, 2, 3, \dots \infty$

Ces trois conditions sont à la base de la définition de la stationnarité du second ordre ou de la stationnarité au sens faible. Elles permettent à la série temporelle X_t de fluctuer autour de sa moyenne.

L'exemple le plus simple d'un processus stationnaire est le processus de bruit blanc (e_t) ou les ε sont indépendantes et de même loi, la loi normale : $N(0, \sigma^2)$. Il en découle que :

- * $E(e_t) = 0$
- * $E(e_t^2) = \text{var}(e_t) = \sigma^2$
- * $Cov(e_t, e_{t-s}) = E(e_t, e_{t-s}) = 0$

La non-vérification des trois conditions traduit la non-stationnarité de la série (c'est-à-dire la présence de racines unitaires). Il faut donc la différencier autant de fois que nécessaire pour la rendre stationnaire. Le nombre de différenciation à opérer sur la série est édicté par le nombre des racines unitaires qui la caractérisent.

Ainsi, un processus est dit intégré d'ordre p , $I(p)$, s'il doit être différencié p fois avant d'être stationnaire.

L'exemple le plus simple d'une série non stationnaire est la marche aléatoire :

$$X_t = X_{t-1} + e_t$$

Avec e_t : un terme aléatoire stationnaire

La différence première de X_t est stationnaire ($DX_t = X_t - X_{t-1} = e_t$)

Le processus X est donc intégré d'ordre 1, $I(1)$.

1.3.2. Test de la stationnarité

Plusieurs tests de racines unitaires ont été proposés afin de tester la stationnarité des séries temporelles. Le test le plus utilisé est le test de Dickey et Fuller (1979)⁵⁶ qui a pour objet de tester l'hypothèse nulle de processus non stationnaire contre l'hypothèse alternative de processus stationnaire. Son intérêt est ainsi de renseigner sur la nécessité de différencier la série étudiée.

Trois types de modèles auto régressifs d'ordre 1 AR (1) sont alors envisagés :

- Modèles sans constante ni tendance : $DX_t = j X_{t-1} + e_t$ (1)

- Modèle avec constante : $DX_t = a_1 + j X_{t-1} + e_t$ (2)

- Modèle avec constante et tendance : $DX_t = a_2 + bt + j X_{t-1} + e_t$ (3)

Avec e_t sont indépendantes et identiquement distribuées (iid).

Et $j = r - 1$ (ρ est le coefficient de corrélation entre X_{t-1} et X_t).

Il est à noter que :

Si $-1 < j < 1$ ($r < 0$) alors le processus est stationnaire.

Si $j = 1$ ($r = 0$) alors le processus suit une marche aléatoire/

⁵⁶ Dickey, D.A., Fuller, W.A., 1979. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. Journal of the American Statistical Society 75, 427-431.

Si $j > 1$ ($r > 0$) alors le processus est explosif c'est-à-dire s'il débute en un certain point, sa variance s'accroît continuellement avec le temps et tend vers l'infini.

Les trois modèles présentés ci-dessus sont restrictifs dans la mesure où ils envisagent uniquement l'existence d'une structure AR (1) et ils supposent que les termes d'erreurs sont des bruits blancs.

La généralisation au cas d'un processus AR (p) conduit au test de Dickey-Fuller augmenté (ADF). Les modèles (1), (2) et (3) deviennent alors :

$$DX_t = j X_{t-1} + \sum_{i=1}^r j_i X_{t-i} + e_t \quad (1.1)$$

$$DX_t = a_1 + j X_{t-1} + \sum_{i=1}^r j_i X_{t-i} + e_t \quad (2.1)$$

$$DX_t = a_2 + b_t + j X_{t-1} + \sum_{i=1}^r j_i X_{t-i} + e_t \quad (3.1)$$

Il est à remarquer finalement que les statistiques du test Dickey-Fuller initialement conçues pour les modèles (1), (2) et (3) demeurent valables même si les résidus de la régression (e_t) ne sont pas i.i.d. Il suffit, pour les blanchir (pour les rendre des bruits blancs) de choisir le nombre de retard (p) dans les trois modèles ci-dessus.

Dickey et Fuller (1981)⁵⁷ ont tabulé la distribution exacte du test des racines unitaires pour des échantillons finis. Ainsi, si la statistique ADF observée est inférieure en valeur absolue à la statistique ADF tabulée ou critique alors la série étudiée n'est pas stationnaire en niveau mais elle peut l'être moyennant un certain nombre de différenciation. Une telle caractéristique constitue un avantage pratique important en faveur du test des racines unitaires par rapport aux autres tests de la stationnarité.

Par ailleurs, le test ADF nécessite la détermination de l'ordre de retard optimal h^* en se basant sur des critères statistiques d'informations tels que :

- Le critère d'Akaike (Aic) : il consiste à retenir l'ordre de retard qui minimise la fonction

suivante :

$$Aic(h) = \text{Log} \left(\frac{SCR_h}{n} \right) + \left(\frac{2h}{n} \right)$$

- Le critère de Schwartz (Sc) : il consiste aussi à retenir l'ordre de retard qui minimise la fonction suivante :

$$Sc(h) = \log \left[\frac{SCR_h}{n} \right] + \left[\frac{h \log(n)}{n} \right]$$

⁵⁷ David Dickey and Wayne A Fuller, *Econometrica*, 1981, vol. 49, issue 4, pages 1057-72

Tableau 4: Test de Dickey-Fuller augmenté

	Prob.	Lag	Obs
US 0-1	0.0745	1	162
US 1-3	0.0000	1	162
US 3-5	0.0000	0	163
US 5-7	0.0000	0	163
US 7-10	0.0000	0	163
TIPS 1-5	0.0000	0	163
US AGY 1-3	0.0007	3	160
US MBS	0.0000	2	161
AAA 1-3	0.0107	5	158

Source : Notre propre analyse avec le logiciel Eviews.

Les résultats de la table 4 présentent les probabilités d'accepter l'hypothèse nulle à savoir, présence de racine unitaire. Nous pouvons remarquer que pour la série US 0-1, l'hypothèse de stationnarité ne peut être acceptée qu'à un degré de confiance de 10%. Nous allons donc conduire le test non paramétrique Phillips-Perron (1988)⁵⁸ qui suit les mêmes étapes que celles du test Dickey-Fuller. Toutefois, suite à une correction non paramétrique, ce test est plus permissif quant à l'hypothèse émise sur la nature du processus de l'erreur, cas d'erreurs à processus moyenne mobile (MA) notamment.

Tableau 5: Test de Philips-Perron

Séries	Prob.	Bandwidth	Obs.
US 0-1	0.0135	4.0	163
US 1-3	0.0000	7.0	163
US 3-5	0.0000	5.0	163
US 5-7	0.0000	5.0	163
US 7-10	0.0000	5.0	163
TIPS 1-5	0.0000	4.0	163
US AGY 1-3	0.0000	7.0	163
US MBS	0.0000	7.0	163
AAA 1-3	0.0000	2.0	163

Source : Notre propre analyse avec le logiciel Eviews.

Les résultats de la table 5 indiquent que nous pouvons accepter l'hypothèse de stationnarité sur toutes les séries avec un risque de première espèce de 1%, hormis la variable US 0-1 pour

⁵⁸ Phillips, P. C. B.; Perron, P. (1988). "Testing for a Unit Root in Time Series Regression". *Biometrika*. 75 (2): 335–346

laquelle la probabilité est de 1.35%. Nous pouvons dès lors commencer à analyser la nature des processus suivis par les séries étudiées.

II. Estimation et actualisation de la volatilité :

II.1. Définition du processus :

Si nous définissons la volatilité d'une variable de marché σ_n pour la journée n , estimée à la fin de la journée $n-1$. Cette volatilité élevée au carré, σ_n^2 est la variance. Si maintenant nous définissons u_i le rendement à capitalisation continue de la variable de marché S_i (entre $i-1$ et i), formellement :

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

Et l'estimation sans biais de la variance quotidienne, σ_n^2 , en utilisant les observations les plus récentes de u_i sera :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (u_{n-1} - \bar{u})^2$$

Avec \bar{u} la moyenne des u_i :

$$\bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (u_{n-1})$$

Pour une finalité pratique, et afin de surveiller la volatilité quotidiennement la formule du rendement est changée en tant que pourcentage de changement de la variable du marché entre $i-1$ et i , ainsi :

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$$

\bar{u} est supposé nul, et enfin $m-1$ et remplacé par m (ce qui nous fait passer d'une estimation sans biais à un estimation de maximum de vraisemblance). Ces petits changements modifient quelque peu les résultats des estimations, mais permettent par la suite une simplification considérable du développement des formes analytiques.

La variance devient alors tout simplement :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i}^2$$

II.2. Actualisation de la volatilité et le modèle ARCH (m) :

L'équation précédente accorde un même poids à toutes les observations passées de u^2_i . Puisque notre objectif est d'estimer le niveau actuel de la volatilité, il serait donc plus commode d'accorder une prépondérance aux observations les plus récentes. Formellement :

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2$$

La variable α_i est définie en tant que le poids accordé à l'observation i jours en arrière. Les α_i sont par ailleurs tous positifs. Si maintenant nous choisissons $\alpha_i < \alpha_j$ si $i > j$, alors les observations les plus anciennes seront moins considérées que les plus récentes. Par ailleurs, il faut que la somme des α_i soit égale à 1.

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

Si maintenant nous supposons qu'il existe une moyenne de la variance long-terme à laquelle nous devons accorder une certaine pondération, le modèle devient :

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2$$

où V_L est la moyenne de la variance de long-terme et γ le poids accordé à V_L . Puisque la somme des pondérations doit être égale à 1, nous aurons désormais :

$$\gamma + \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

Ce modèle est plus connu sous le nom de ARCH (m). Suggéré par Engle (1982)⁵⁹, l'estimation de la variance est effectuée sur la base de la moyenne long-terme de la variance et des m dernières observations. Plus l'observation est ancienne, moins de poids elle aura.

Si nous définissons $\omega = \gamma V_L$, le modèle s'écrit alors ainsi :

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2$$

II.3. Le processus Moyenne Mobile Exponentielle (Exponentially Weighted Moving Average - EWMA) :

Le processus « moyenne mobile exponentielle » (EWMA par la suite) est un cas particulier du modèle à équipondéré, où les α_i diminuent exponentiellement pour les observations les moins récentes. Dans ce schéma $\alpha_{i+1} = \lambda \alpha_i$, où λ est une constante définie entre 0 et 1.

La forme générale de ce modèle est très simple et s'énonce comme suit :

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) u_{n-1}^2$$

L'estimation de la volatilité σ_n^2 pour la journée n , (établie à la fin de la journée $n-1$) est calculée à partir de σ_{n-1}^2 (cette estimation étant faite à la fin de la journée $n-2$). Pour comprendre la logique de ce processus itératif qui débouchera sur la forme générale, il suffit de suivre l'enchaînement suivant :

$$\sigma_n^2 = \lambda[\lambda \sigma_{n-2}^2 + (1 - \lambda) u_{n-2}^2] + (1 - \lambda) u_{n-1}^2$$

Ou encore,

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2) + \lambda^2 \sigma_{n-2}^2$$

En faisant la même chose avec σ_{n-2}^2 nous aurons :

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda)(u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2 + \lambda^2 u_{n-3}^2) + \lambda^3 \sigma_{n-3}^2$$

En continuant ce processus $m-1$ fois nous aurons,

⁵⁹ R. Engle "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation," *Econometrica*, 50 (1982): 987-1008.

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} u_{n-i}^2 + \lambda^m \sigma_{n-m}^2$$

Pour des valeurs importantes de m le terme $\lambda^m \sigma_{n-m}^2$ devient négligeable, nous retrouvons alors la forme précédente :

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2$$

Avec $\alpha_i = (1 - \lambda)\lambda^{i-1}$

Les poids de u_i diminuent avec un taux λ à chaque fois que nous remontons le temps. Chaque poids est donc, λ fois le poids précédent.

L'attrait de cette approche est de ne pas exiger un nombre important d'observations passées. À chaque pas, nous aurons seulement besoin de l'estimation actuelle de la variance ainsi que l'observation la plus récente de la variable sur le marché. Quand cette dernière est observée, le nouveau pourcentage de variation est calculé, ainsi en recourant à la première formule du modèle EWMA, nous aurons l'actualisation de la variance selon cette approche. L'ancienne estimation de la variance et l'ancienne observation de la variable du marché devenant ainsi superflues.

Cette approche a été élaborée pour suivre le changement de la volatilité de la variable de marché. Par exemple, si en $n-1$, le changement de la variable u_{n-1}^2 est important, la nouvelle estimation de la variance et donc de la volatilité sera corrigée à la hausse. La réactivité de l'estimation dépend en effet de la variable λ . Si cette dernière est faible, un poids important va être affecté à la variable u_{n-1}^2 . Ainsi, même l'estimateur lui-même sera fortement volatil. Inversement, un λ élevé (proche de 1) produit des estimations qui répondent avec une faible réactivité à la nouvelle information apportée par le pourcentage de changement u_i .

L'approche de la base de données *RiskMetrics*⁶⁰ a opté pour un coefficient $\lambda = 0.94$ pour mettre à jour les estimations de la volatilité. Ceci est supporté par le fait que les auteurs de ladite approche ont trouvé l'évidence que cette valeur produit les estimations les plus proches des variances réalisées pour différentes variables de marché.

⁶⁰Cf. JPMorgan, RiskMetrics Monitor, Fourth Quarter, 1995

II.4. Le modèle GARCH (1,1) – (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) :

Ce modèle proposé par Bollerslev (1986)⁶¹ présente une simple différence avec le modèle EWMA. En effet, GARCH (1,1) prend en considération dans son estimation la moyenne de la variance long-terme V_L en plus de σ_{n-1} et de u_{n-1} .

Formellement le modèle GARCH (1,1) s'énonce comme suit :

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

Où γ est le poids assigné à V_L et α le poids assigné à u_{n-1}^2 et enfin β est le poids assigné à σ_{n-1}^2 . Une condition de stationnarité du processus est que la somme des pondérations doit être égale à l'unité. $\gamma + \alpha + \beta = 1$.

Ainsi le modèle EWMA est un cas particulier du GARCH (1,1) où $\gamma = 0$, $\alpha = (1 - \lambda)$ et $\beta = \lambda$.

Pour revenir à la notation (1,1), le premier 1 désigne que σ_n^2 est parti du retard le plus récent sur u^2 tandis que le second 1 indique qu'il s'agit de l'observation la plus récente de la variance.

Dans le cas général, GARCH (p, q), p concerne les u^2 et q concerne les σ^2 passés.

En notant $\omega = \gamma V_L$ le modèle devient :

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

Cette forme est utilisée pour l'estimation du modèle. Une fois ces paramètres déterminés,

$\gamma = 1 - \alpha - \beta$, la variance de long terme est alors $V_L = \frac{\omega}{\gamma}$. Pour un processus GARCH (1,1)

stable, $\alpha + \beta < 1$. Sinon le poids appliqué à la variance de long terme sera négatif.

⁶¹ T. Bollerslev, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity," Journal of Econometrics, 31 (1986): 307-27.

II.4.1. Estimation de la volatilité future et phénomène de retour à la moyenne (*Mean-Reversion*) :

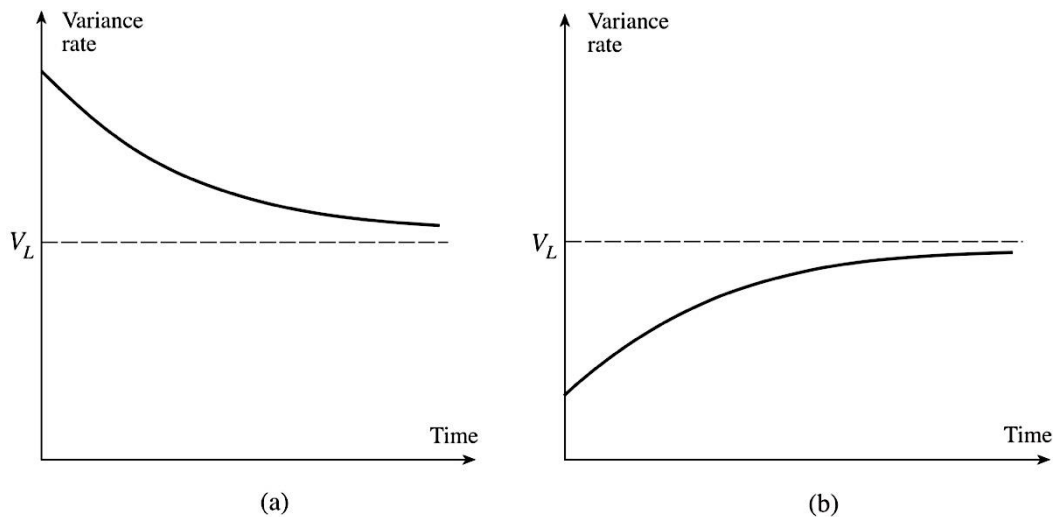
Le modèle GARCH (1,1) considère que la variance tend à être rappelée à sa moyenne de long-terme V_L . En effet le poids de $V_L = \gamma = 1 - \alpha - \beta$. Il s'en suit que le GARCH (1,1) est équivalent au processus stochastique suivant :

$$dV = a(V_L - V)dt + \xi V dz$$

où t est mesuré en jour, $a = 1 - \alpha - \beta$, et $\xi = \alpha\sqrt{2}$. Ceci est un modèle vérifiant le processus de retour à la moyenne. La variance a un drift qui la rappelle à sa moyenne V_L à un taux a .

Quand $V_L > V$, la variance a un drift négatif, si à l'inverse $V_L < V$, la variance a un drift positif, en plus d'une certaine volatilité ξ .

Figure iii: Processus de retour à la moyenne de la variance



Source : John Hull, *Options, Futures and other Derivatives*, 11th edition.

Ainsi

$$\sigma_n^2 = (1 - \alpha - \beta)V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

D'où

$$\sigma_n^2 - V_L = \alpha (u_{n-1}^2 - V_L) + \beta (\sigma_{n-1}^2 - V_L)$$

Pour $n+t$ dans le futur nous aurons :

$$\sigma_{n+t}^2 - V_L = \alpha (u_{n+t-1}^2 - V_L) + \beta (\sigma_{n+t-1}^2 - V_L)$$

Et puisque la valeur espérée de $u_{n+t-1}^2 = \sigma_{n+t-1}^2$ nous aurons :

$$E[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha + \beta)E[\sigma_{n+t-1}^2 - V_L]$$

Si nous procédons à ce processus itérativement nous aurons :

$$E[\sigma_{n+t}^2] = V_L + (\alpha + \beta)^t(\sigma_n^2 - V_L)$$

Cette équation prévoit la volatilité à $n+t$ en utilisant l'information valable à la fin de $n-1$. Dans le modèle EWMA $\alpha + \beta = 1$ ce qui nous ramène à la variance actuelle. Par contre, quand $\alpha + \beta < 1$, le terme $(\sigma_n^2 - V_L)$ devient de plus en plus petit quand t augmente. Ceci indique que, plus nous avançons dans le temps, plus la variance espérée tend à retourner vers sa moyenne de long-terme V_L . Si par ailleurs, si $\alpha + \beta > 1$, la pondération donnée à V_L est négative, et le processus n'est plus tiré vers sa moyenne mais à l'inverse, il tend à s'écarter de sa moyenne. Ceci vient prouver la supériorité théorique du modèle GARCH par rapport au modèle EWMA.

II.4.2. Justification du recours au modèle GARCH :

L'hypothèse sous-jacente au modèle GARCH est que la volatilité n'est pas constante et évolue dans le temps. Durant certaines périodes la volatilité sera élevée, durant d'autres périodes elle sera faible. En d'autres termes, quand le u_i^2 est élevé, il y aura une tendance à ce que les u_{n+t}^2 seront élevés. Inversement, quand u_i^2 est faible les u_{n+t}^2 auront tendances à être aussi faibles. Pour tester ce phénomène, il faudrait examiner l'autocorrélation des u_i^2 . Pour ce faire, la littérature suggère le recours au test de Ljung-Box⁶². Toutefois, le modèle GARCH est indifférent quant au signe de u_{i-1} . Or, nous savons que la volatilité est inversement corrélée au mouvement des prix sur le marché. En d'autres termes, nous avons beaucoup plus de volatilité dans un marché baissier avec un $u_i < 0$ que dans un marché haussier avec le même taux $u_i > 0$. Ceci nous amène à vouloir considérer cet effet dans notre modèle d'estimation de volatilité afin d'incorporer ce phénomène d'asymétrie.

⁶² G. M. Ljung and G. E. P. Box, "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models," *Biometrika*, 65 (1978): 297-303.

II.5. Modèles Asymétriques :

II.5.1. Le modèle EGARCH (Exponential GARCH) :

La forme simple du modèle GARCH implique certaines limitations sur le plan pratique.

- Rappelons que la corrélation négative entre le rendement d'un actif et la variabilité de sa volatilité fait que, cette dernière, augmente en réponse aux « mauvaises nouvelles » (u_i plus faible que prévu ou encore en excès négatif), et inversement, exhibe une diminution en réponse aux « bonnes nouvelles » (u_i plus important que prévu ou encore en excès positif). En effet, le modèle GARCH prend en compte seulement la magnitude des rendements non anticipés (u_i), mais aucunement le signe de cette innovation, pour déterminer σ_t^2 . Suivant Nelson (1991)⁶³, Si la distribution de z_t est symétrique, le changement de la variance à $t+1$ est conditionnellement non corrélé avec le rendement en excès à t . Si alors nous réécrivons σ_t^2 en fonction des σ_t^2 et z_t^2 retardés, avec $\varepsilon_t^2 = z_t^2 \sigma_t^2$ nous aurons :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j z_{t-j}^2 \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

Sous cette forme c'est évident que la variance conditionnelle est invariante par rapport au signe des z_t^2 .

- En outre, la non-négativité des paramètres du modèle GARCH, notamment celle de ω , qui est imposée pour assurer un $\sigma_t^2 > 0$ pour tous les t sous une probabilité unitaire est une autre limite pour le modèle en question. Ces contraintes impliquent qu'en augmentant z_t^2 pour quelque période que ce soit, σ_{t+m}^2 augmente pour tout $m \geq 1$, ce qui implique un comportement oscillatoire aléatoire dans le processus de σ_t^2 .
- Par ailleurs, le modèle GARCH est incapable d'expliquer la covariance observée entre $\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}$. Ceci étant seulement possible si la variance est exprimée en tant que fonction asymétrique de ε_{t-1} .

⁶³ Nelson D.(1991) "Conditional Heteroskedasticity in asset returns: A new approach", *Econometrica*, 59,347-370.

- De plus, pour le modèle GARCH (1,1), les chocs peuvent persister durant un intervalle et se dissiper durant un autre, d'où les moments conditionnels du GARCH (1,1) peuvent devenir explosifs même si le processus est strictement stationnaire et ergodique (sa moyenne tend vers son espérance).
- Enfin, le modèle GARCH spécifie essentiellement le comportement des carrés des observations, d'où, quelques observations importantes en termes de magnitude peuvent dominer l'échantillon.

Les modèles asymétriques viennent notamment pallier à la problématique des réponses asymétriques, aussi bien en termes de signe que de magnitude. Ils apportent une explication au phénomène connu dans la littérature, dans ce contexte, sous le nom d'effet de levier (par exemple une baisse non attendue du prix augmente la volatilité plus qu'une hausse similaire du prix). Nelson (1991) a proposé une première explication de σ_t^2 sur la base, et de la magnitude, et du signe des résidus. C'est le modèle EGARCH (p, q) (*Exponential GARCH*) tel que :

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-1}^2) + \sum_{i=1}^q \alpha_i [\phi z_{t-i} + \psi(|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|)]$$

Avec $\alpha_{i \neq 1}$ et $E|z_t| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ sachant $z_t \sim NID(0, 1)$, avec ω, α_i et β_i sans contrainte de positivité.

Pour ne pas s'arrêter au niveau de l'expression analytique du modèle, nous allons le décomposer pour rendre compte de l'incorporation des phénomènes d'asymétrie et de magnitude visés afin de les rendre plus intelligibles.

Nous allons donc considérer :

$$g(z_t) \equiv \phi z_t + \psi(|z_t| - E|z_t|)$$

Par construction $\{g(z_t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ est une séquence aléatoire *i.i.d* de moyenne nulle. Ses composantes ϕz_t et $\psi(|z_t| - E|z_t|)$ sont toutes deux de moyennes nulles pareillement. Si la distribution de z_t est symétrique, ses composantes sont orthogonales, bien que non indépendantes. Dans l'intervalle $0 < z_t < +\infty$, $g(z_t)$ est linéaire en z_t avec une pente égale à $\phi + \psi$, et dans l'intervalle $-\infty < z_t < 0$ elle est pareillement linéaire en z_t avec une pente égale à $\phi - \psi$. D'où

$g(z_t)$ permet au processus conditionnel de $\{\sigma_t^2\}$ de répondre asymétriquement aux changements positifs et négatifs de u_t . Le terme $\psi(|z_t| - E|z_t|)$ représente l'effet de magnitude. Si $\psi > 0$ et $\phi = 0$, l'innovation en $\ln(\sigma_t^2)$ est positive (négative) quand la magnitude de u_t est plus grande (petite) que sa valeur espérée. Si maintenant $\psi = 0$ et $\phi < 0$, l'innovation de la variance conditionnelle sera positive (négative) quand u_t est négatif (positif).

II.5.2. Cas du modèle GJR-GARCH :

A l'instar du modèle EGARCH, ce modèle continue l'extension des modèles asymétriques. Développé par Glosten, Jagannathan et Runkle (1993)⁶⁴, il ne diffère que légèrement du modèle TARARCH introduit par Zakoïan (1991)⁶⁵ qui prend en considération dans sa première version l'écart-type au lieu de la variance en tant que variable expliquée, et l'erreur retardée en niveau et non élevée au carré comme pour la spécification du modèle GJR en tant que variable explicative.

L'expression de ce modèle se présente ainsi :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2 + \gamma \epsilon_{t-j}^2 d_{t-j} + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

Ainsi ce modèle considère aussi l'effet du signe des innovations ϵ_{t-j} , et ce qu'on a tendance à appeler dans ce cadre particulier, l'effet de levier « *leverage effect* » (voir le modèle EGARCH). Ceci, rappelons-le capte l'information en faisant la différence entre les « bonnes nouvelles » avec un effet α , et les « mauvaises nouvelles » avec un effet $\alpha + \gamma$ via la variable binaire (*dummy*) $d_{t-j} = 1$ si $\epsilon_{t-j} < 0$ et 0 par ailleurs.

Notons que le modèle GARCH est un cas particulier du modèle GJR avec un coefficient $\gamma = 0$.

II.5.3 Cas du modèle Component GARCH asymétrique :

Ce modèle proposé par Engle et Lee (1999)⁶⁶, a été développé pour rendre compte d'une façon plus appropriée de la variance constante de long-terme (inconditionnelle) exprimée dans

⁶⁴ Glosten, L.R., R. Jagannathan and D. Runkle (1993), "On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks," *Journal of Finance*, 48, 1779-1801.

⁶⁵ Zakoïan, J. M. (1991). Threshold heteroskedastic models, Technical report, INSEE

⁶⁶ Engle, R.F. and G.G.J. Lee (1999), "A Permanent and Transitory Component Model of Stock Return Volatility," in R.F. Engle and H. White (eds.), *Cointegration, Causality, and Forecasting: A Festschrift in Honor of Clive W.J. Granger*, 475-497. Oxford, UK: Oxford University Press.

le modèle GARCH (voir ci-haut) par $V_L = \frac{\omega}{\gamma}$ avec $\gamma = (1 - \alpha - \beta)$. En effet, ce modèle à cette variance de long-terme de varier au cours du temps.

En réécrivant le modèle GARCH (1,1) ainsi :

$$(\sigma_n^2 - V_L) = \alpha (\epsilon_{n-1}^2 - V_L) + \beta (\sigma_{n-1}^2 - V_L)$$

Ce processus exhibe un effet de retour à la moyenne de long-terme V_L , or le modèle CGARCH est obtenu en relâchant l'hypothèse de constance de V_L , ainsi nous aurons :

$$(\sigma_n^2 - \zeta_t) = V_L + \alpha (\epsilon_{n-1}^2 - V_L) + \beta (\sigma_{n-1}^2 - V_L)$$

Avec la variance de long-terme correspondante décrite par l'expression suivante :

$$\zeta_t = \omega + \rho(\zeta_{t-1} - \omega) + \varphi(\epsilon_{n-1}^2 - \sigma_{n-1}^2)$$

Ici, σ_n^2 exprime toujours la volatilité, alors que ζ_t prends la place de ω , et qui est désormais la variance de long-terme qui varie dans le temps. La première équation $(\sigma_n^2 - \zeta_t)$ décrit dès lors la composante transitoire qui converge vers 0 avec une vitesse $(\alpha + \beta)$. La seconde équation, ζ_t , décrit la composante de long-terme qui converge vers ω avec une vitesse ρ . D'une manière générale ρ est entre 0.99 et 1 ce qui fait que, ζ_t approche ω très lentement. En substituant cette expression dans l'expression précédente, le modèle CGARCH pourrait être exprimé alternativement comme étant un modèle GARCH (2, 2) non-linéaire restreint.

Dans notre travail, nous avons inclus un terme d'asymétrie dans la composante transitoire afin de capturer l'effet de levier, ce qui combine ce modèle avec le modèle GJR. Ceci nous a amené à estimer un modèle de la forme suivante :

$$\zeta_t = \omega + \rho(\zeta_{t-1} - \omega) + \varphi(\epsilon_{n-1}^2 - \sigma_{n-1}^2) + \theta_1 z_{1t}$$

$$(\sigma_n^2 - \zeta_t) = \alpha \epsilon_{n-1}^2 - \zeta_{t-1} + \beta \sigma_{n-1}^2 - \zeta_{t-1} + \gamma \epsilon_{t-1}^2 - \zeta_{t-1} d_{t-1} + \theta_2 z_{2t}$$

Où les z sont les variables exogènes, et d , une variable binaire qui indique les chocs négatifs.

Ainsi, si $\gamma > 0$ cela nous renseigne sur la présence d'un effet de levier transitoire qui amplifie la volatilité en cas de « mauvaise nouvelle ». Et de toute façon, si $\gamma \neq 0$, cela implique l'existence d'une asymétrie dans les réponses.

II.6. Méthodologie de spécification des modèles ARCH:

Afin de spécifier correctement nos modèles de volatilité une stratégie séquentielle a été suivie pour prendre en compte les spécificités de chaque série. Il est à noter qu'en plus de la recherche d'une bonne spécification des modèles de volatilité, nous visons des erreurs standardisés pour lesquelles nous pouvons accepter l'hypothèse de normalité. Ceci nous sera utile par la suite afin de pouvoir appréhender correctement les mouvements extrêmes, notamment, pour le calcul de la VaR suivant l'approche dite paramétrique présentée dans le second chapitre du présent travail.

II.6.1. Autocorrélations, autocorrélations partielles et effet ARCH :

Un fait généralement reconnu dans les régressions des séries temporelles est que les résidus sont corrélés avec leurs propres retards. Ceci transgresse l'hypothèse fondamentale qui stipule que les erreurs ne doivent pas être corrélées. Ce qui aboutit au fait que la régression en moindres carrés ordinaires (MCO) n'est plus efficiente, les erreurs standards ne sont plus correctes et si la variable endogène retardée se présente comme une variable explicative, les estimations sont biaisées et inconsistantes.

Pour ajuster correctement les modèles de nos séries, nous avons examinés les autocorrélations (AC) et les autocorrélations partielles (PAC) des séries ainsi que les statistiques des Q-test de Ljung-Box⁶⁷. Après ajustement d'un nombre de modèles candidats, nous avons effectué le test LM « *Lagrange Multiplier* » d'autocorrélation sérielle de Breusch-Godfrey⁶⁸ pour juger si nous avons pu atténuer ces effets. Puis, une fois les modèles candidats retenus, nous avons examiné pour chaque série les AC et PAC des carrés des résidus, et nous avons conduits le test LM ARCH tel que proposé par Engle (1982)⁶⁹ pour examiner la présence d'effet ARCH.

⁶⁷ G. M. Ljung; G. E. P. Box (1978). "On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models". *Biometrika*. 65 (2): 297–303.

⁶⁸ Breusch, T. S. (1978). "Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models". *Australian Economic Papers*. Godfrey, L. G. (1978). "Testing Against General Autoregressive and Moving Average Error Models when the Regressors Include Lagged Dependent Variables". *Econometrica*. 46: 1293–1301.

⁶⁹ Engle, Robert F. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation". *Econometrica*. 50 (4): 987–1007.

Tableau 6 : Test d'autocorrélation sérielle et effet ARCH

Série	Modèle	LM Breusch-Godfrey	Prob.	LM ARCH	Prob
US0-1	AR(2)	0.858390	0.6510	35.13635	0.0000
US1-3	ARMA (1,1)	2.412295	0.2993	19.50339	0.0002
US3-5	AR(1)	13.97257	0.3025	26.97331	0.0078
US5-7	ARMA (1,1)	0.215135	0.8980	22.57337	0.0316
US7-10	AR(1)	2.252382	0.3243	6.284357	0.0122
TIPS1-5	ARMA (1,1)	13.52844	0.3318	5.630015	0.0177
Agcy 1-3	ARMA(5,5)	16.51210	0.1689	21.85363	0.0000
USMBS	ARMA(5,6)	5.984151	0.9169	6.990377	0.0082
Corp	AR(2)	0.564465	0.7541	25.34522	0.0000

Source : Notre propre analyse avec le logiciel Eviews.

Nous pouvons conclure à partir de la table 6 que, bien que l'autocorrélation sérielle des résidus soit filtrée, l'autocorrélation du carré des résidus reste toujours présente. En nous basant sur le test LM ARCH, il apparaît que toutes nos séries exhibent un effet ARCH à un seuil de significativité de 1% pour 7 variables et 5% pour les 2 restantes.

II.6.2. Spécification des modèles ARCH :

Tableau 7 : Spécification des modèles de volatilité

Séries	Modèle	Stand. Resid. JB Prob. ⁽¹⁾
US0-1	ARMA- (1, 2) -GARCH	0.00 ⁽²⁾
US1-3	EGARCH	0.67
US3-5	EGARCH	0.46
US5-7	EGARCH	0.59
US7-10	GJR-GARCH	0.02 ⁽²⁾
TIPS1-5	EGARCH	0.35
Agcy 1-3	ARMA(1,1)-EGARCH ⁽³⁾	0.82
USMBS	GARCH	0.05
Corp	COGARCH	0.42

Source : Notre propre analyse avec le logiciel Eviews.

⁽¹⁾ Probabilité d'accepter l'hypothèse de normalité suivant le test JB.

⁽²⁾ Ces valeurs seront expliquées plus loin.

⁽³⁾ Ce modèle n'inclut pas en compte l'effet d'asymétrie.

Si le modèle est correctement spécifié les résidus standardisés doivent être indépendants et identiquement distribués (i.i.d.) d'une moyenne nulle et de variance égale à l'unité (significativement). Si en plus, ils sont normalement distribués, alors les estimateurs de maximum de vraisemblance sont asymptotiquement efficaces. Si par contre, l'hypothèse de normalité des résidus standardisés n'est pas vérifiée, les estimateurs restent toujours consistants sous l'hypothèse de quasi maximum de vraisemblance (voir plus loin pour plus de détails).

Tableau 8 : Résultats des estimations

	US0_1	US1_3	US3_5	US5_7	US7_10	TIPS1_5	Agcy 1-3	USMBS	Corp
	ARMA(1,2) - EGARCH	EGARCH	EGARCH	EGARCH	GJR -GARCH	EGARCH	ARMA(1,1) - EGARCH	GARCH	CGARCH
ω	-0.9227***	-1.3940**	-1.0943**	-0.5277*	1.7E-05***	-2.266***	-0.581**	5.6E-05***	0.00036
α	0.6227***	0.2719**	-0.1813**	-0.1565**	0.0738***	0.8259***	0.4357***	0.2342***	-0.216***
β	0.969718***	0.9016***	0.8713***	0.9268***	0.991***	0.8241***	0.9797***	-0.285***	0.8275***
γ	-	0.1949*	0.2714***	0.2131***	-0.2643***	-0.2281***	-	-	0.4884***
ρ	-	-	-	-	-	-	-	-	0.9990***
ϕ	-	-	-	-	-	-	-	-	0.2299***
AIC	-12.25	-8.72	-6.69	-5.88	-5.26	-6.67	-8.96	-7.01	-8.20
SIC	-12.13	-8.62	-6.59	-5.78	-5.16	-6.59	-8.84	-6.93	-8.06
LL	925.04	663.44	510.20	449.44	402.44	508.18	669.36	533.50	626.41
LM	0.8131	0.7620	0.5263	0.4614	0.2882	0.7125	0.1764	0.5331	0.9404

Source : Notre propre analyse avec le logiciel Eviews.

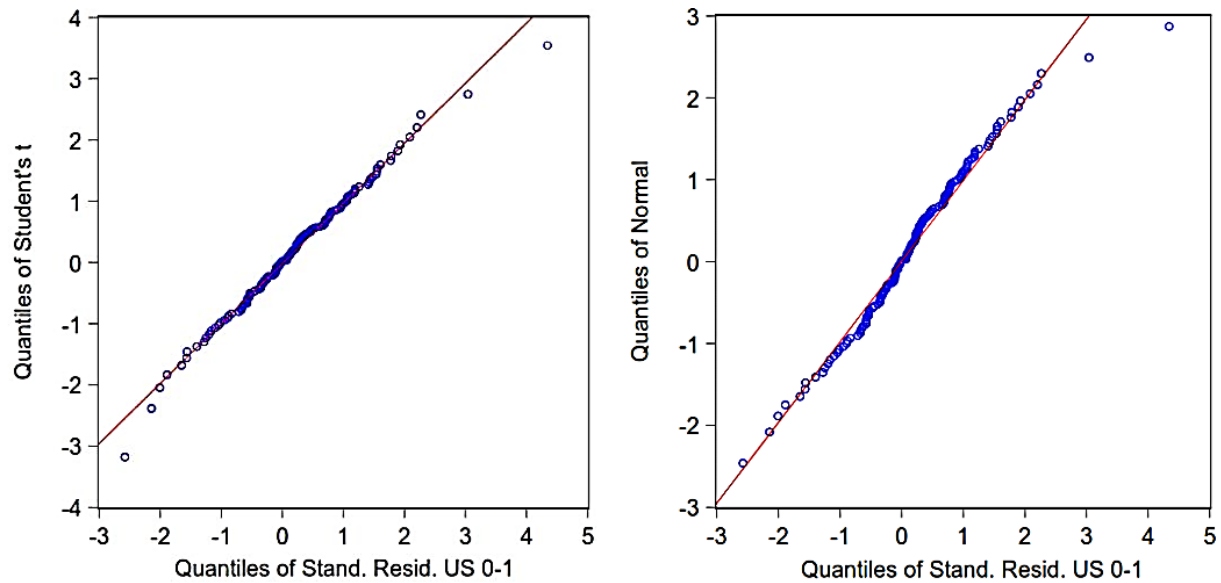
Par soucis de clarté, pour le modèle EGARCH, il faut lire α l'effet de magnitude et γ l'effet d'asymétrie, pour le modèle CGARCH, c'est la composante de l'équation de la variance de long-terme (ζ_t).

*, **, *** pour dire respectivement le seuil critique 10%, 5% et 1%.

Pour les séries US0-1, US7-10 et US MBS, tel que l'exhibe la table 9, nous avons constaté que nous pouvions accepter que les erreurs standardisées soient i.i.d. Toutefois, l'hypothèse de normalité a été rejetée par le test JB. Ceci nous a incités à refaire notre estimation en recourant à la méthode de Bollerslev-Wooldridge (1992)⁷⁰ à laquelle nous pouvions avoir recours en cas de soupçon de non normalité des erreurs, afin de conserver la consistance de nos estimateurs sous l'hypothèse de quasi-maximum de vraisemblance. Nous avons suite à cela procédé à une comparaison quantile-quantile de la distribution de notre nouvelle série d'erreurs standardisées contre la distribution normale et la distribution de Student. Nous avons dès lors conclu que la loi normale était plus appropriée, sauf que la présence d'une certaine valeur dans la région positive (à l'extrême droite du graphique 1) pouvait biaiser les résultats de tout l'échantillon considéré. Par ailleurs, comme nous pouvons le remarquer sur le graphique, les valeurs extrêmes négatives résident bien sur la droite de la distribution théorique, tandis qu'elles tendent à s'en écarter pour le cas de la loi de Student. Les résidus standardisés de la série US 0-1 correspondent bien à la distribution de la loi normale. Nous avons alors procédé à l'élimination de ladite valeur (Aout 2007). Puis, nous avons réexaminé la statistique JB (voir table 9), celle-ci nous a suggéré d'accepter l'hypothèse de normalité des erreurs standardisées avec une probabilité de 0.43. (Voir l'annexe pour les graphiques Q-Q des 2 autres séries).

⁷⁰ Bollerslev, T., Wooldridge, J.M., 1992. Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Reviews* 11, 143–172.

Figure 2: Comparaison $Q-Q$ des résidus avec les lois normale et Student



Source : Notre propre analyse sur le logiciel Eviews.

Tableau 9 : Statistiques descriptives et test de normalité des résidus reconsidérés

	RS US 0-1 ML ^(*)	RS US 0-1 QML ^(*)	RS7-10 ML ^(*)	RS 7-10 QML ^(*)	RS US MBS ML ^(*)	RS US MBS QML ^(*)
Mean	0.204142	0.176363	0.058537	0.033823	0.022036	0.043421
Median	0.163226	0.161021	0.004567	0.004567	-0.053304	-0.048342
Max	4.343193	3.040896	4.131753	2.554597	3.421135	3.421135
Min	-2.574682	-2.574682	-2.069021	-2.069021	-3.185682	-2.856617
Std. Dev	0.983672	0.926076	1.047219	0.993087	1.008718	0.977151
Skewness	0.404035	-0.027480	0.481817	0.178639	-0.052002	0.114739
Kurtosis	4.870597	3.519074	3.593051	2.557757	3.968175	3.739194
JB	25.95069	1.691511	8.055215	2.033635	5.965631	3.744178
Prob.	0.000002	0.429233	0.017817	0.361744	0.050650	0.153802
Obs.	150	149	151	150	151	150

Source : Notre propre analyse avec le logiciel Eviews.

(*) : ML et QML respectivement maximum de vraisemblance et quasi-maximum de vraisemblance.

Vu que le présent travail ne s'intéresse pas à l'analyse des modèles, et des ajustements de la volatilité estimé *stricto sensu*, nous nous contenterons de quelques commentaires sur la consistance des estimateurs.

Nous pouvons clairement voir sur la table 8 que tous les coefficients sont statistiquement significatifs selon la probabilité de la z -statistic. Les modèles retenus sont ceux qui minimisent les critères d'information d' Akaike et de Schwarz, respectivement AIC et SIC sur la table 8, et qui maximisent le critère du Loglikelihood (logarithme de vraisemblance), LL sur ladite table. Par

ailleurs, après avoir vérifié l'absence d'autocorrélation sérielle, nous avons effectué le test LM ARCH afin de nous assurer du rejet de l'hypothèse d'un éventuel effet ARCH résiduel.

Nous devons préciser que les modèles EGARCH des séries US 0-1 et US Agency 1-3 présentent seulement un effet de magnitude de l'erreur, mais pas celui du signe de l'innovation. De ce fait, ils présentent seulement 3 coefficients au lieu de 4. En, les modèles qui présentent un effet d'asymétrie qui prend en compte les « mauvaises nouvelles » affichent un coefficient significativement positif. Enfin, les modèles ARMA du processus en moyenne présentent des coefficients significatifs au seuil de 1% (voir l'annexe).

Nous pouvons désormais procéder au calcul des différentes VaRs dynamiques.

III. Calcul des VaRs-GARCH et prévision hors-échantillon :

Nous avons d'abord procédé au calcul de la VaR (95%) et de la CVaR (95%) à 1 mois pour tout l'échantillon en éliminant les premières périodes nécessaires au calibrage des modèles qui incluent une spécification ARMA dans l'équation de moyenne. Ceci nous sera utile, pensons-nous, pour évaluer la validité des modèles, ainsi que pour pouvoir apporter une lecture critique sur les spécifications qui prennent en compte l'effet d'asymétrie et de magnitude des innovations. Pour ce faire, nous avons calculé le nombre total ainsi que le pourcentage des violations. Les résultats sont présentés ci-dessous dans la table 10. Pour confronter les résultats des VaRs estimées à partir des modèles GARCH avec une autre méthode, nous avons pensé utile de calculer la VaR selon l'approche historique. Pour ce faire, nous avons effectué un bootstrap de 10 000 tirages à partir des rendements historiques des séries étudiées. Puis, nous avons calculé pour chaque série le 5^{ème} centile pour avoir la VaR mensuelle à 95%. Par ailleurs, pour avoir la CVaR historique, il suffit de calculer la moyenne arithmétique des dépassements comme étant un estimateur de l'espérance des dépassements. Naturellement, pour le calcul de la VaR paramétrique, nous avons suivi la démarche étalée dans le chapitre 2 du présent travail.

Tableau 10 : Calcul de la VaR (95%) 1 mois de l'échantillon complet.

Benchmark	Viol.	VaR-G	VaR Hist.	CVaR-G	CVaR Hist.	VaR-G+	CVaRG+
US 0-1 EGARCH*	Nombre	0	8	0	2	55	41
	(%)	0,00%	4,90%	0,00%	1,20%	34,00%	25,30%
US 1-3 EGARCH	Nombre	2	7	0	2	19	9
	(%)	1,20%	4,30%	0,00%	1,20%	11,70%	5,60%
US 3-5 EGARCH	Nombre	2	7	1	2	21	9
	(%)	1,20%	4,30%	0,60%	1,20%	13,00%	5,60%
US 5-7 EGARCH	Nombre	3	7	2	3	12	7
	(%)	1,90%	4,30%	1,20%	1,90%	7,40%	4,30%
US7-10 GJR- GARCH	Nombre	3	7	0	3	15	9
	(%)	1,90%	4,30%	0,00%	1,90%	9,30%	5,60%
US TIPS EGARCH	Nombre	6	6	2	1	10	3
	(%)	3,70%	3,70%	1,20%	0,60%	6,20%	1,90%
US Agcy EGARCH*	Nombre	2	7	0	2	18	11
	(%)	1,20%	4,30%	0,00%	1,20%	11,10%	6,80%
US MBS** GARCH	Nombre	4	7	3	4	21	8
	(%)	2,50%	4,30%	1,90%	2,50%	13,00%	4,90%
US Corp CGARCH	Nombre	2	7	2	1	20	12
	(%)	1,20%	4,30%	1,20%	0,60%	12,30%	7,40%

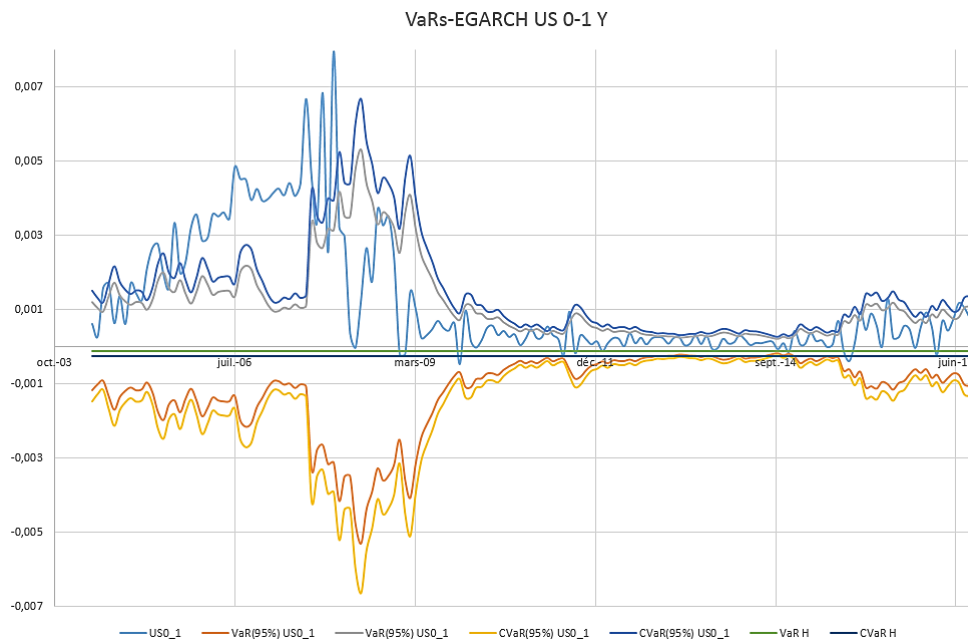
Source : Notre propre analyse avec le logiciel Eviews.

* n'incluent qu'un effet de magnitude.

** n'admet ni effet de magnitude ni d'asymétrie.

A partir de la table ci-dessus, nous pouvons conclure que la VaR et la CVaR calculées à partir des volatilités estimées par les modèles GARCH affichent de meilleurs résultats que la méthode historique. En effet, tandis que cette dernière tend à s'approcher du seuil critique choisi (5%), la VaR-GARCH reste loin de cette valeur, pour une moyenne totale sur toutes les séries de 1,64% de dépassement. Ce qui attire par contre notre attention, c'est les violations dans la zone des rendements positifs. La volatilité étant une mesure symétrique, la distribution de la loi normale pareillement, il suffit d'inverser le signe de la VaR pour avoir la VaR+. Toutefois, il se trouve qu'un examen des graphiques serait plus judicieux pour avoir une vue globale sur la qualité d'ajustement, ainsi que sur la prise en compte des effets de magnitude et d'asymétrie. Le modèle qui nous interpelle le plus est celui de la série US 0-1 qui affiche le nombre le plus important des dépassements en zone de gain (34%). Rappelons qu'il s'agit d'un modèle EGARCH qui ne prend pas en compte l'effet des asymétries, mais seulement de la magnitude des innovations, prises en compte en valeur absolue dans le modèle et non en tant qu'erreur élevée au carré. Le graphique 2 nous renseigne plus sur ces dépassements.

Figure 3 : VaRs-EGARCH US 0-1 Y

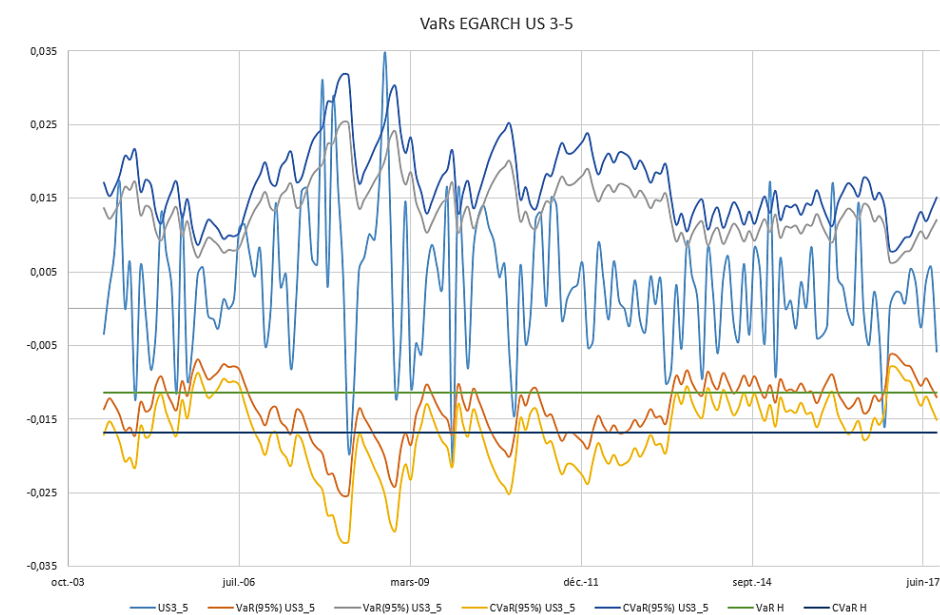


Source : Notre propre analyse sur Excel.

L'inspection du graphique corrobore le soubassement théorique du modèle. En effet nous pouvons voir que la période entre le début de notre série jusqu'à mi-2008 est caractérisée par un mouvement faible en termes de magnitude. Il se trouve alors que la volatilité, telle qu'estimée par le modèle, affiche des mouvements relativement faibles. Dès que les mouvements des rendements commencent à prendre de l'ampleur, notamment en zone positive, le modèle reflète cela directement sur son estimation de la volatilité, ce qui nous donne des VaRs relativement importantes qui perdurent jusqu'à 2010. Par ailleurs, la VaR historique, qui s'intéresse seulement aux valeurs en niveau des rendements, affiche une VaR et une CVaR très faibles, ce qui explique le nombre des violations qu'elles affichent.

Il serait intéressant de visualiser le comportement d'un modèle qui prend en compte un effet d'asymétrie positif, en d'autres termes, qui amplifie la volatilité si une erreur négative a été observée la période précédente. Nous choisirons le modèle EGARCH US 3-5 Y qui affichent le gamma le plus élevé de l'ordre de 0,27 (cf. la table 8).

Figure 4 : VaRs-EGARCH US 3-5 Y



Source : Notre propre analyse sur Excel.

Nous pouvons remarquer que ce modèle s’ajuste mieux aux mouvements des rendements, c’est d’ailleurs confirmé par le nombre de violations de sa VaR. Ce phénomène est visible nettement en début de la période étudiée, où nous pouvons observer une magnitude assez forte qui est « paradoxalement » suivie par une baisse de la VaR (mouvement haussier de la courbe rouge). En effet, nous pouvons voir que la VaR est quasiment tangente à la courbe des rendements (nettement à 3 reprises), sans pour autant qu’il y ait de violations. Ceci est aussi observé lors de la crise des subprimes de 2008, où le modèle a montré une certaine performance. Il est toutefois à rappeler que cette période est incluse dans l’échantillon. Ce que nous pouvons commenter par contre, c’est la flexibilité du modèle, qui a exhibé une bonne capacité d’ajustement.

III.1. Capacité prédictive des modèles de volatilité :

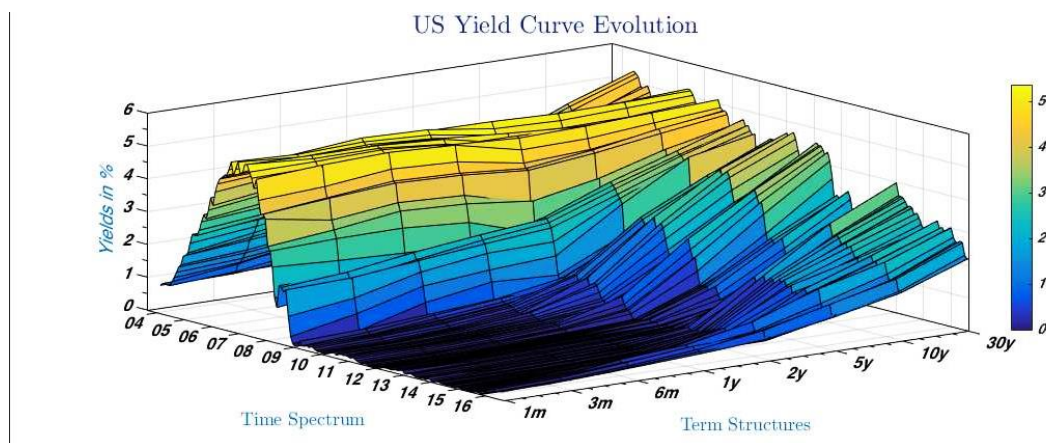
S’agissant de la capacité prédictive des modèles spécifiés, nous avons effectué une prévision à $t+1$ sur 13 observations hors-échantillon, ce qui correspond à une période d’une année et un mois. Les résultats sont globalement satisfaisants, puisque l’on a assisté à une seule violation correspondant à un événement extrême auquel aucune des méthodes n’a résisté. Il s’agit de l’observation novembre 2016, date à laquelle il y a eu l’élection de Donald Trump en tant que président des Etats-Unis contre toute attente. En effet, les investisseurs ont reflété leurs anticipations pessimistes violemment sur la courbe des taux US. Ceci nous a amené à considérer la méthode Delta-Gamma, présentée dans le chapitre 2 du présent travail, pour le calcul de la

VaR. Rappelons que cette méthode est basée sur une expression analytique de la VaR qui prend en compte la première et la seconde dérivée du portefeuille par rapport au facteur de risque, en le cas d'espèce, le taux d'intérêt. Pour le cas d'un portefeuille de titres à revenus fixes, il est tout à fait orthodoxe de considérer la durée en tant que dérivée première, et la convexité en tant que dérivée seconde. Nous allons donc pouvoir effectuer un calcul de la VaR en nous basant uniquement sur l'information contenue dans la courbe des taux.

III.2. Approche Hybride Delta-Gamma – Nelson Siegel :

Le graphique 4 présente l'évolution de cette courbe durant la période étudiée.

Figure 5 : Evolution de la courbe des taux Spot US (02/2004 - 09/2017)



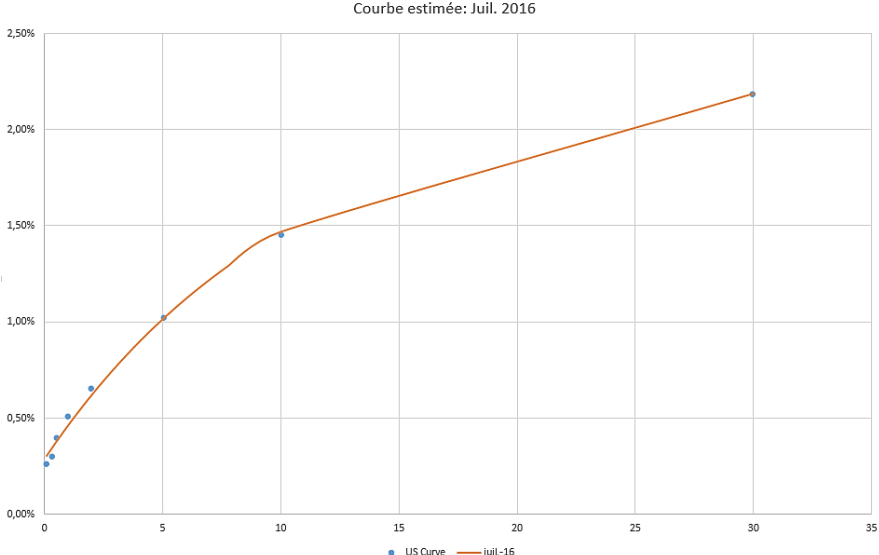
Source : Notre propre analyse avec le logiciel Matlab.

Nous pouvons très bien voir que durant la période considérée dans notre étude, la courbe spot US a subi différentes déformations. Ces dernières sont la conséquence de mouvements non parallèles, et d'une structure non linéaire. De ce fait, pour un calcul correct des variations des taux auxquels ont été exposés les différents benchmarks, il n'est pas commode de procéder à une interpolation linéaire. En effet, chaque segment affiche une évolution qui lui est propre. Pour pouvoir approcher justement cette évolution nous avons eu recours au modèle à trois facteurs de Nelson-Siegel (1987)⁷¹. Ce modèle explique l'évolution de la courbe des taux en se basant sur 3 facteurs, à savoir, β_1 le niveau, β_2 la pente, ainsi que la courbure noté β_3 . Un quatrième facteur par ailleurs est fixé afin de situer la courbure noté λ . Nous n'allons pas nous

⁷¹ Nelson, C.R., and A.F. Siegel (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business* 60, 473-489.

étaler davantage sur ce sujet, d'autant que nous n'avons pas procédé à un calibrage méthodique du modèle, notre souci étant d'interpoler correctement les taux d'intérêts pour chaque segment. Sur le graphique 5 nous pouvons voir la qualité d'ajustement de ce modèle.

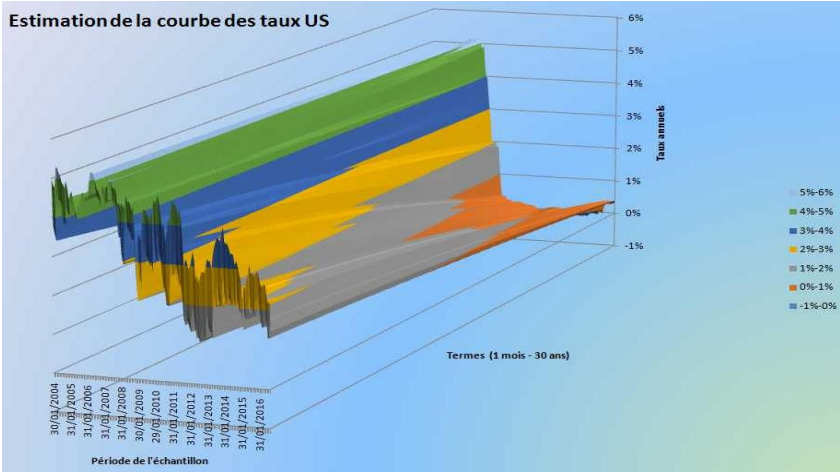
Figure 6 : Exemple d'une courbe ajustée via le modèle Nelson-Siegel



Source : Notre propre analyse avec le logiciel Matlab.

De ce fait, ce modèle nous a permis de reconstruire la surface des taux (graphique 6) telle que présenté dans le graphique 4.

Figure 7 : Résultat d'estimation de l'évolution de la courbe des taux US



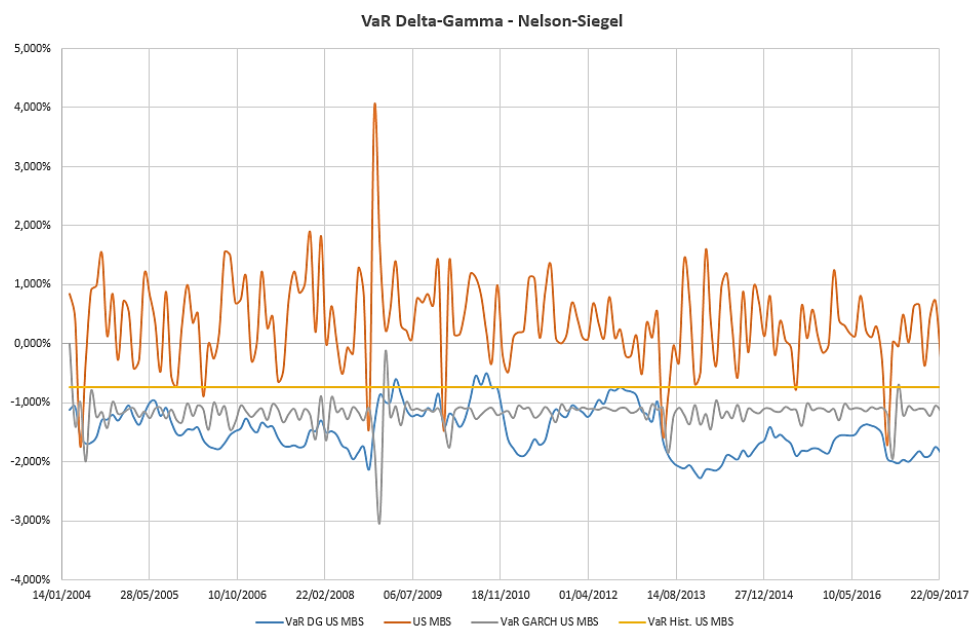
Source : Notre propre analyse avec le logiciel Excel.

A partir des différents coefficients estimés pour chaque période, nous avons pu interpoler les différents taux auxquels ont été exposés les benchmarks étudiés en prenant la durée comme

proxy de la durée de vie moyenne. A partir de ces taux nous avons pu calculer les différentes variations de taux que chaque benchmark a subies durant la période étudiée. Ces variations ne sont naturellement pas gaussiennes, la prise en compte de l'écart-type n'est donc pas appropriée pour le calcul de la VaR paramétrique. Nous avons donc décidé de combiner l'approche Delta-Gamma à l'approche historique via un bootstrap de 5000 tirages en considérant cette fois-ci le 95^{ème} centile et non le 5^{ème} centile, puisque notre facteur de risque est dans ce contexte une hausse des taux. Ceci peut s'interpréter comme étant la variation extrême à 95% qu'un benchmark a pu subir historiquement sur son segment spécifique de la courbe des taux spot US. Au niveau d'un portefeuille, cette approche a l'avantage d'être simple, puisqu'elle ne considère pas la matrice des covariances. En effet, la duration (la convexité) d'un portefeuille, c'est la somme pondérée des durations (convexité) de ses composantes. Dans le graphique 7 nous pouvons avoir l'évolution de la VaR hybride que nous avons calculée via une combinaison de la méthode delta-gamma et la méthode historique. L'ajustement dynamique de ladite VaR est lié plutôt à l'évolution des facteurs de risques déterministes du benchmark à savoir, sa duration et sa convexité. En effet, ces indicateurs renseignent sur l'exposition de l'investisseur aux mouvements de la courbe des taux. En prenant la plus forte variation positive à 95%, nous avons eu la VaR (95%) sur le rendement du benchmark selon son exposition. Cette mesure peut être efficace et rapide à calculer sur des produits tels que les MBS (*Mortgage-Backed securities*). En effet, les produits de MBS peuvent afficher une importante variation de leurs durations du fait des remboursements anticipés qui peuvent avoir lieu. Ces remboursements sont directement liés à l'évolution de la courbe des taux. Ceci est expliqué par le fait que les ménages tendent à racheter leurs prêts en cas des baisses des taux d'intérêt. Il est à noter par ailleurs que, pour des bons vanilles (sans options), la convexité est positive, de ce fait, la prendre en compte résulte sur des estimations moins conservatrices, certes, mais plus réalistes.

Ce que nous pouvons remarquer sur le graphique 7, c'est que, contrairement à la VaR historique calculée sur la base des rendements, la VaR Delta-Gamma hybride est plus réaliste et nous donne une idée plus exacte sur l'exposition au risque d'intérêt selon le profil de duration et de convexité que l'investisseur a décidé d'avoir. En outre, cette approche est la seule qui a permis d'avoir une VaR qui a résisté au choc de novembre 2016 sur 6 séries. Pour les séries US 3-5, US 5-7 et US 7-10 par contre, cette violation n'a pas pu être évitée. Ceci est expliqué par le fait que ces benchmarks présentent les durations moyennes les plus importantes (cf. table 2), et sont de ce fait, les plus sensibles aux variations de la courbe des taux.

Figure 8 : VaR Delta-Gamma – Historique du benchmark US MBS



Source : Notre propre analyse avec le logiciel Excel.

Tableau 11: Violations de la VaR Delta-Gamma - hybride

Benchmark	US 0-1	US 1-3	US 3-5	US 5-7	US7-10	US TIPS	US Agcy	US MBS	US Corp
Nombre	0	3	8	4	4	12	4	1	3
En (%)	0%	2%	5%	2%	2%	7%	2%	1%	2%

Toutefois, c’est toujours la VaR-GARCH qui présente les meilleurs résultats et surtout qui permette d’avoir une vision prospective adéquate.

III.3. Approximation de Cornish-Fisher :

Nous avons par ailleurs procédé à l’ajustement des quantiles qui nous ont permis d’approcher les distributions empiriques de nos séries aux moyens de l’approximation de Cornish-Fisher présentée dans le chapitre 2 du présent travail. Rappelons que cette méthode se base sur le quantile de la loi normale, puis via la prise en compte des moments centrés d’ordre 3 et 4 de la distribution empirique, elle fournit une nouvelle mesure du quantile à un seuil déterminé qui prend en compte les asymétries et les queues épaisses. Notons aussi que cette approximation perd de son efficacité pour des niveaux de confiance supérieurs à 95,8%. Elle est par ailleurs commode pour une VaR (95%).

Tableau 12: Violations de la VaR Cornish-Fisher

Benchmark	US 0-1	US 1-3	US 3-5	US 5-7	US7-10	US TIPS	US Agcy	US MBS	US Corp
Nombre	0	4	5	7	7	3	6	5	3
En (%)	0,0%	2,4%	3,0%	4,3%	4,3%	1,8%	3,7%	3,0%	1,8%
Quantile	-1,05	-1,23	-1,51	-1,52	-1,45	-1,74	-1,06	-1,40	-1,53

Nous pouvons constater à partir de la table 12 que les résultats de cette approche sont satisfaisants. Par contre ce qui attire notre attention c'est que tous les quantiles ont été revus à la baisse relativement à la loi normale (1.65 à 95%) à part la série US TIPS 1-5. Ceci est dû au fait que toutes les skewness sont positives, à par celui de l'indice cité qui est négatif (voir table 3). En effet, une asymétrie positive tend à augmenter le quantile. Toutefois, bien-que les résultats sont satisfaisants pour l'estimation de risque, cette approche n'a pas la possibilité de nous apporter un contenu informationnel pour l'évolution future des volatilités afin de pouvoir en faire usage dans le processus de l'allocation d'actifs.

IV. Construction de portefeuille :

IV.1. Théorie des copules :

Une fois nos modèles de volatilité spécifiés, nous allons pouvoir nous intéresser à la construction des portefeuilles politiques, mais une donnée indispensable doit être spécifiée, en l'occurrence, les corrélations qui nous permettront de construire la matrice de covariances dynamiques visée.

Nous avons vu au début de ce chapitre que nos rendements n'affichent pas des distributions normales, de ce fait, l'écart-type ne nous est plus d'une grande utilité en tant que mesure de volatilité. Ceci nous a amené à spécifier un modèle de volatilité adéquat pour chaque série, d'une manière à avoir des résidus standardisés pour lesquels nous pouvons accepter l'hypothèse de normalité. Ainsi, nous avons le moyen d'approcher cette variable aléatoire dans un cadre gaussien bien défini et surtout, dument justifié.

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés par la spécification des corrélations qui répondent justement à notre cadre. Naturellement, considérer les corrélations linéaires historiques irait en contradiction avec l'objectif du présent travail. Nous avons opté pour les copules puisqu'elles nous permettent d'analyser séparément les distributions marginales des rendements et leurs structures de dépendances. Ainsi, les copules permettent l'incorporation de lois non gaussiennes et la prise en compte des dépendances non linéaires entre nos séries de variables aléatoires.

Un fait considérable dans la réalité des marchés financiers est que les malheurs n'arrivent jamais seuls, et qu'un mouvement extrême d'une variable, qu'elle soit le rendement une classe d'actifs ou encore d'un marché, induit le même effet aux autres variables qu'elles lui sont plus ou moins reliées. Les copules nous permettent d'appréhender justement cette structure de dépendance. En d'autres termes, elles nous permettent de prendre en considération les événements de la queue d'une distribution de probabilité donnée. Nous ne nous étalerons pas davantage sur ce sujet, ce n'est pas l'objet du présent travail, nous nous contenterons d'en donner la définition et le théorème fondamental sur lequel repose cette démarche.

IV.1.1. Définition d'une copule:

Soient X_1, \dots, X_d des variables aléatoires ayant pour fonctions de répartition F_1, \dots, F_d . Par ailleurs, si nous notons F la fonction de répartition du vecteur (X_1, \dots, X_d) . Nous notons la copule C , associée à la loi F , la fonction de répartition du vecteur $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$. Par ailleurs,, C est aussi la fonction qui associe le nombre $F(F_1^{-1}(x_1), \dots, F_d^{-1}(x_d))$ à la fonction (u_1, \dots, u_d) .

IV.1.2. Théorème de Sklar⁷² :

Soit F une fonction de répartition d-variée de marges continues F_1, \dots, F_d , il existe alors une unique copule C telle que :

$$F((x_1), \dots, (x_d)) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad (x_1, \dots, x_d) \in (-\infty, +\infty)^d$$

D'une manière réciproque, si C est une copule, et si F_1, \dots, F_d sont des fonctions de répartition, alors la fonction F , telle que définie par l'expression précédente, est une fonction de répartition de marges F_1, \dots, F_d .

Ce théorème démontre que si nous avons la copule C , et les marges F_i , nous pouvons alors reconstruire la loi F . De ce fait, la copule C associée à la loi F est interprétée comme la structure de dépendance pure. En effet, c'est une décomposition de la densité f de F en produits des lois marginales et de la densité c de C , nous avons donc :

⁷² A. Sklar. Fonction de répartition dont les marges sont données, 1959. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8 :229–231, 1959.

$$f((x_1), \dots, (x_d)) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) f_1(x_1) \dots f_d(x_d)$$

Ce résultat est fondamental, en effet, il justifie la modélisation en se basant sur les copules.

IV.2. Modélisation de la copule bivariée de Student :

Pour les séries considérées nous avons opté pour la copule de Student. Notre choix réside sur le fait que parmi les 4 familles généralement admises, et dirons-nous usuelles, en l'occurrence, la copule gaussienne, celle de Student, de Clayton ou encore de Gumbel (les 2 premières sont dites elliptiques, les 2 dernières sont dites archimédiennes). La copule de Student est celle qui prend compte les critères recherchés quant aux mouvements extrêmes conjoints, qu'ils soient haussier, ou baissier. En effet, la copule gaussienne n'admet tout simplement pas le fait que les valeurs extrêmes soient dépendantes. Par contraste, la copule de Student prend en compte les mouvements extrêmes haussiers et baissiers. La copule de Clayton n'admet que les mouvements extrêmes conjoints baissiers. A l'inverse la copule de Gumbel n'admet que les mouvements extrêmes conjoints haussiers.

Rappelons que nos séries sont au nombre de 9, de ce fait nous aurons $(9 \times 8) / 2$ corrélations à estimer, c'est-à-dire 36 copules bivariées.

La copule de Student de degré de liberté X est définie telle que :

$$g(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \sqrt{(\pi v)^d}} \left(1 + \frac{x}{v}\right)^{\frac{-(v+d)}{2}} \text{ avec, } v > 2 \text{ et } x \geq 0$$

Avec : v = le degré de liberté de la loi de Student.

Nous avons dit que la loi Student est elliptique, ce qui implique que $E_d(\mu, \Sigma, g)$ est une loi symétrique par rapport à son rayon μ , en d'autres termes $X - \mu$ est identiquement distribué que $\mu - X$. Ceci qui implique que le coefficient de dépendance de la queue inférieure, noté $\lambda^{(inf)}$, est égal à celui de la queue supérieure, noté $\lambda^{(sup)}$.

Les coefficients de dépendance des queues de la copule bivariée de Student à partir de la loi $E_2(\mu, \Sigma, g_v)$ (avec E opérateur d'espérance et Σ la matrice des covariances) sont donnés par la forme suivante :

$$\lambda^{(inf)} = \lambda^{(sup)} = 2t_{v+1} \left(-\sqrt{v+1} \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right)$$

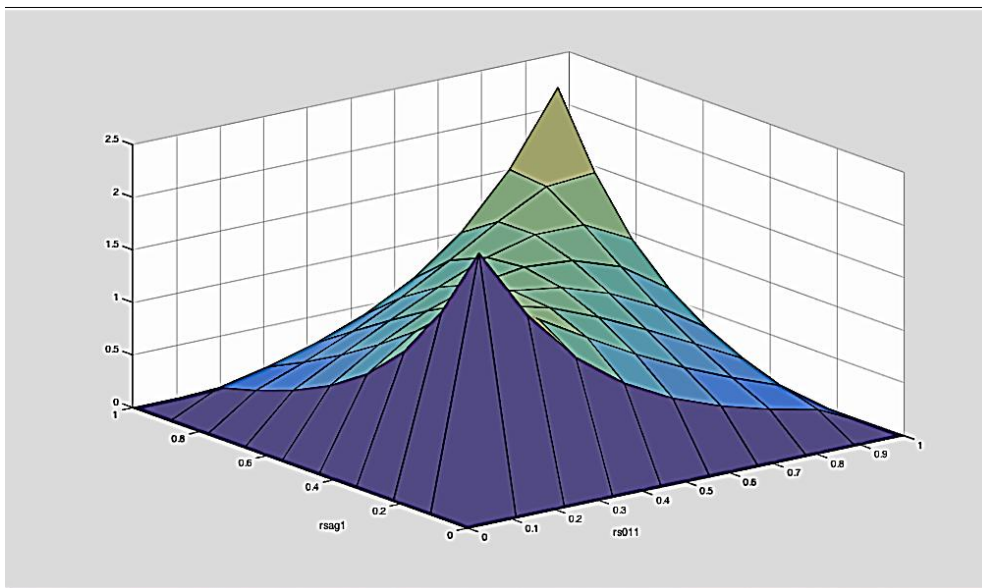
Avec : t_v = la fonction de répartition univariée de Student.

Rappelons que ces coefficients sont nuls pour une corrélation strictement inférieure à 1.

Ces derniers sont notamment importants en cas de simulation, ou de stress-testing.

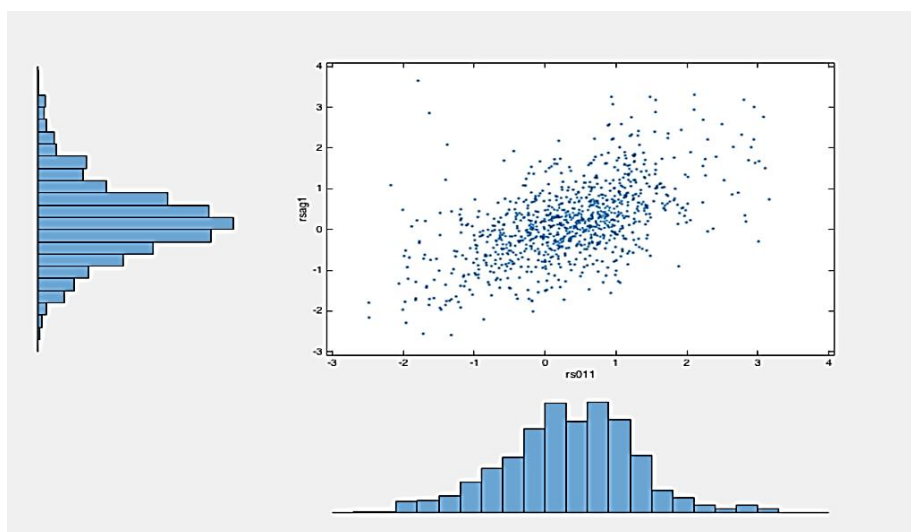
Nous présentons comme exemple, les résultats d'estimation de la copule de Student entre les séries des résidus standardisés US 0-1Y et US Agency 1-3 Y.

Figure 9: Distribution de la copule-t de US 0-1 Y/US Agency 1-3 Y



Source : Notre propre analyse avec le logiciel Matlab.

**Figure 10: Distributions marginales et distribution jointe de la copule de Student
(Simulation de 1000 observations)**



Source : Notre propre analyse avec le logiciel Matlab.

Nous pouvons clairement voir le comportement conjoint de nos 2 variables en cas de mouvements extrêmes en haut à droite et en bas à gauche du graphique 9. Nous remarquons aussi que les variables gardent leurs différentes distributions marginales. La matrice des corrélations ainsi construite, ainsi que le degré de liberté de chaque copule sont fournis dans les annexes. Nous devons noter, par contre, que pour 5 couples de variables, les degrés de liberté sont tels que leurs distributions tendent vers la loi normale. Pour les copules restantes, les degrés de liberté sont bien loin de converger vers le cadre normal (la plupart sont inférieurs à 10).

IV.3. Construction de la matrice des covariances dynamiques :

La dernière étape de ce travail consiste à évaluer la construction de portefeuille en nous basant sur une matrice de variances-covariances dynamiques. Pour ce faire, il suffit de construire ladite matrice à partir de la matrice diagonale des variances dynamiques que nous avons pu avoir via les modélisations GARCH et de la matrice symétrique des corrélations que nous avons pu avoir via l'estimation des copules bivariées de Student. Si nous notons H_t la matrice carrée d'ordre 9 des variances-covariances dynamiques et Σ la matrice carrée symétrique d'ordre 9 des corrélations, nous avons alors :

$$H_t = H_t^{1/2} \Sigma H_t^{1/2}$$

H_t étant diagonale, nous n'avons pas besoin de la transposer.

IV.5.. Simulation Monte-Carlo sur portefeuille à composantes simulées:

Afin de tester la spécification de notre matrice des covariances dynamiques, nous avons effectué une simulation Monte-Carlo sur un portefeuille équipondéré, en générant 1000 tirages aléatoires pour chacune des 9 séries.

Nos séries étant naturellement corrélées, nous avons dû recourir à la décomposition de Cholesky afin d'avoir des tirages qui vérifient la structure de corrélation spécifiée. Pour ce faire, nous avons eu recours à la programmation de cette procédure sur Excel VBA.

En effet, pour nos 9 séries, ayant une matrice de corrélations Σ qui est symétrique et définie positive, la décomposition de Cholesky permet de factoriser cette matrice ainsi : $\Sigma = LL'$ où L est une matrice triangulaire inférieure.

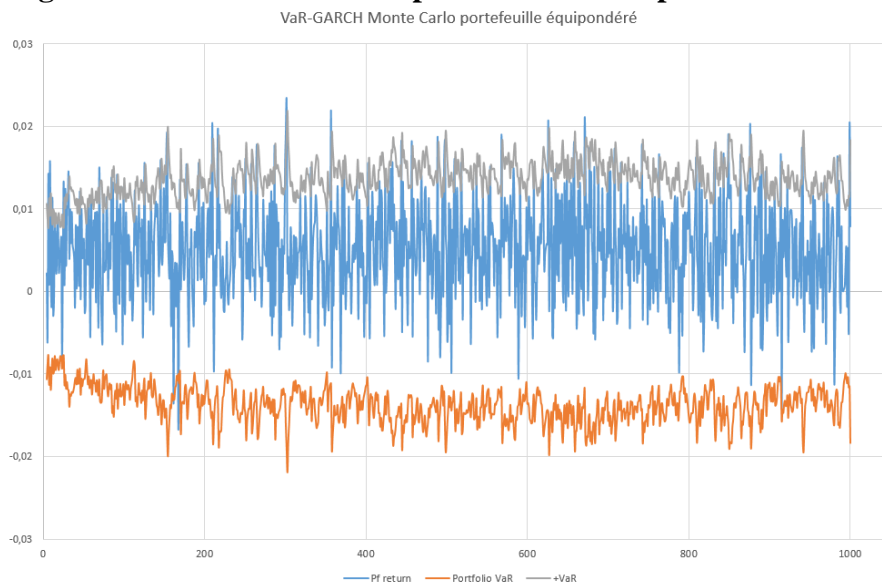
Les variables aléatoires corrélées sont générées ainsi :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_t \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_t \end{bmatrix}$$

Avec, $z_i \sim N(\mu, \sigma)$, la série des rendements non corrélés.

La VaR- GARCH du portefeuille (qui est une combinaison des différents modèles estimés ainsi que les corrélations estimées via la copule de Student) n'a exhibé aucune violation sur les processus aléatoires corrélés générés aux moyens de la simulation Monte-Carlo et de la matrice de Cholesky. Le graphique 10 présente le processus généré ainsi que l'ajustement de la VaR-GARCH (95%) qui va avec.

Figure 11: VaR-GARCH sur portefeuille à composantes simulées



Source : Notre propre analyse avec le logiciel Excel.

La VaR-GARCH (95%) basée sur la matrice des covariances dynamiques construite selon la méthodologie décrite tout au long de ce chapitre n'a été violée que 2 fois (0,2% des cas). Toutefois il est intéressant de remarquer que la VaR-GARCH positive a été violée 89 fois, c'est-à-dire 8,9% des cas, réitérant ainsi la validité des modèles qui prennent en compte les effets d'asymétrie de réponse et validant par ailleurs la matrice des covariances construites.

IV.6. Stabilité des portefeuilles politique :

Dans cette partie nous avons évalué la stabilité de 2 portefeuilles politiques construits selon la méthodologie moyenne-variance classique. Les 2 autres méthodes d'optimisation, à savoir Black-Litterman et moyenne-variance rééchantillonnée vont au-delà de l'envergure du présent travail.

Nous avons, par contre, considéré la variante non-contrainte qui permet des pondérations négative sur les classes d'actifs, en d'autres termes, des ventes à découvert, et la variante contrainte qui est basée sur l'optimisation numérique d'une fonction objective. Notons qu'une pondération négative d'une classe d'actif n'a pas vraiment de sens dans le cadre d'un investissement à long-terme, même en recourant aux produits dérivés. Toutefois, ça nous permet sur le plan méthodologique de porter un jugement sur la validité théorique de notre approche dans le cadre de ce paradigme d'optimisation. Par ailleurs, sur le plan pratique, une pondération négative, et surtout son ampleur, peut renseigner l'investisseur sur l'attitude qu'il devrait adopter par rapport à une classe d'actifs donnée.

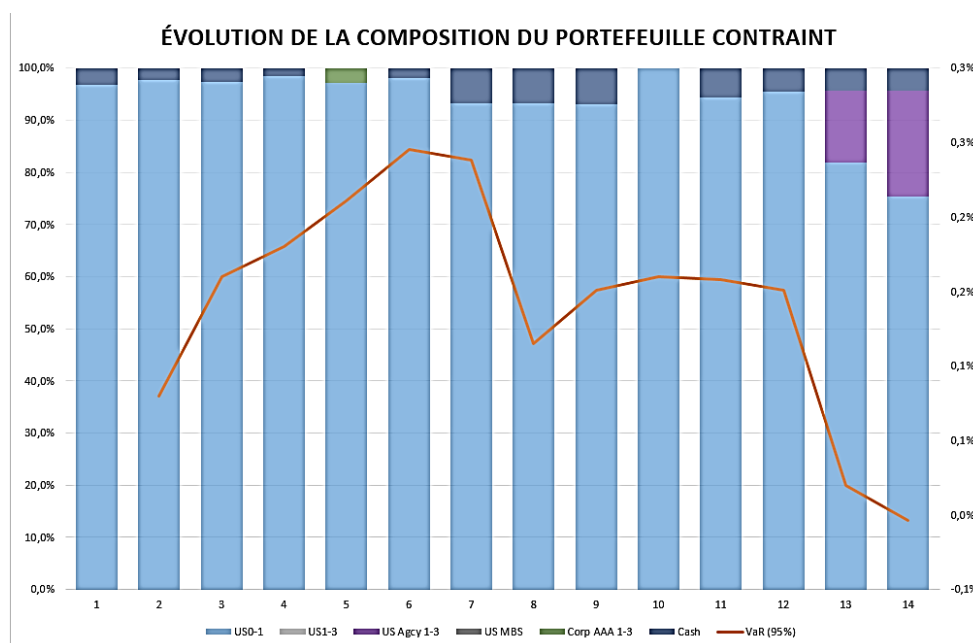
Nous avons donc choisi comme fonction objectif de minimiser la variance sous contrainte d'un rendement espéré donnée, en plus du portefeuille efficient à variance minimale. Naturellement, les rendements espérés utilisés ici sont les moyennes historiques.

Enfin, en ce qui concerne la méthodologie employée, il est à noter que le choix du niveau de rendement 2,2% a été arbitraire.

L'évolution mensuelle sur les données hors-échantillon des composantes des portefeuilles politiques se présentent comme suit :

- **Portefeuille efficient à variance minimale contraint :**

Figure 12: Evolution de la composition du portefeuille 1 contraint



Source : Notre propre analyse avec le logiciel Excel.

- (L'axe des ordonnées de droite indique les différents niveaux de la VaR, celui de gauche indique la composition des portefeuilles).

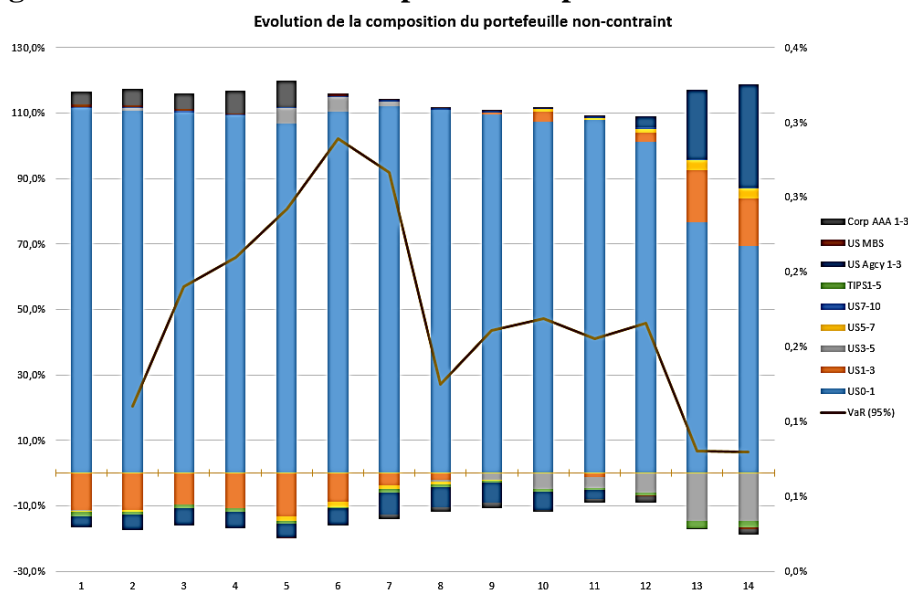
Ce que nous remarquons, c'est la forte concentration de la composition de ce portefeuille. En effet, pour une allocation stratégique de long-terme, un investisseur ne peut négliger l'effet bénéfique de diversification que procure une allocation assez variée. Cette composition propose une pondération allant de 75% à 95% pour le benchmark US 0-1 et le reliquat généralement sous forme de cash. Nous notons par ailleurs, que la VaR-GARCH (95%) se situe en zone positive.

Pour ce qui est de la variation de la composition du portefeuille 1 contraint désormais, nous pouvons voir qu'elle dépasse rarement les 5%. A la fin de la période par contre, nous pouvons voir que l'optimisation délaisse de près de 15% la classe US 0-1 au profit de la classe US-Agency 1-3. Toutefois, pour les autres classes d'actifs, nous ne voyons pas une variation considérable, à part l'apparition éphémère de la classe US Corporate AAA 1-3.

- **Portefeuille efficient à variance minimale non-constraint :**

Passons maintenant au portefeuille non-constraint qui affiche de loin une meilleure diversification sur le plan théorique, quoi qu'il néglige près de 4 classes d'actifs. A partir du graphique 12, nous pouvons voir que la composition est globalement stable pour les 6 premières périodes. Puis petit à petit, nous observons une inversion de tendance pour au moins 3 classes d'actifs, c'est-à-dire, un passage de la zone position courte à la zone position longue. A part le fait que de tels rééquilibrages ne sont pas soutenables à long-terme, ceci a l'avantage d'indiquer à l'investisseur la présence d'une certaine tendance sur certaines classes d'actifs. Et notamment, lesquelles il faudrait éviter et lesquelles il faudrait considérer dans l'horizon à venir.

Figure 13: Evolution de la composition du portefeuille 1 non-constraint

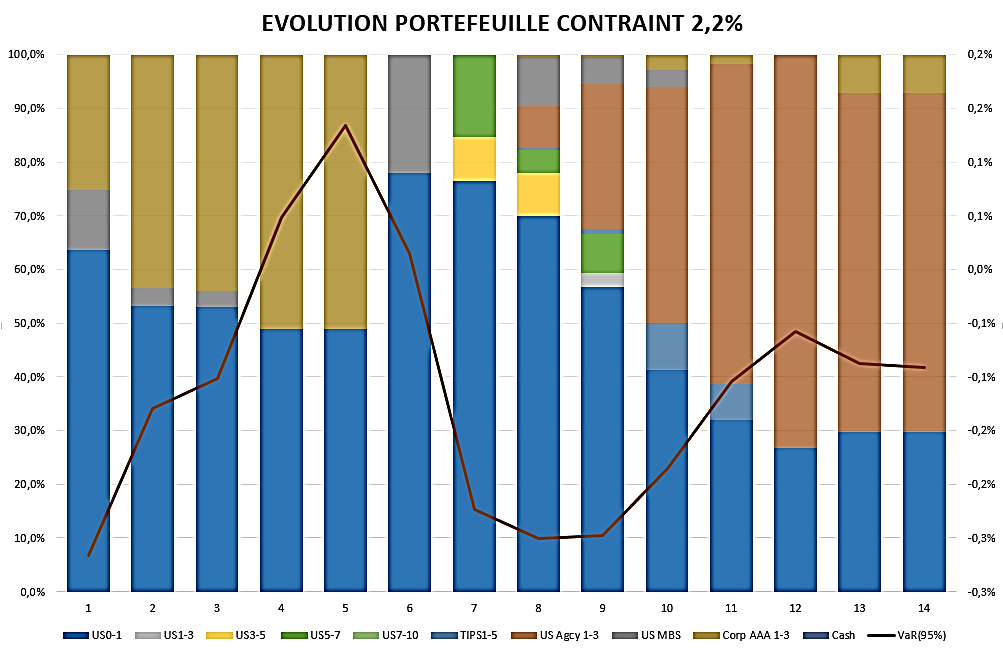


Source : Notre propre analyse avec le logiciel Excel.

Ce qui est intéressant de retenir à partir du graphique 12, c'est la stabilité relative de la composition de ce portefeuille. En effet, pour les 10 premières périodes la variation ne dépasse pas les 5% pour la plupart des benchmarks considérés (hormis la classe Corporate). Toutefois, l'on assiste à un renversement de la composition à partir de la 12^{ème} période, c'est-à-dire après une année. Jusqu'ici, ce que nous pouvons dire, c'est que si cette nouvelle tendance persiste, il est tout à fait commode de reconsidérer la composition du portefeuille à la lumière d'une lecture économique et financière adéquates. Toutefois, puisque notre approche considère l'évolution de la volatilité, il serait plus commode de considérer d'autres portefeuilles à rendements (risques) plus élevés.

- **Portefeuille (2) contraint à rendement annuel objectif 2,2% :**

Figure 14: Evolution de la composition du portefeuille 2 contraint



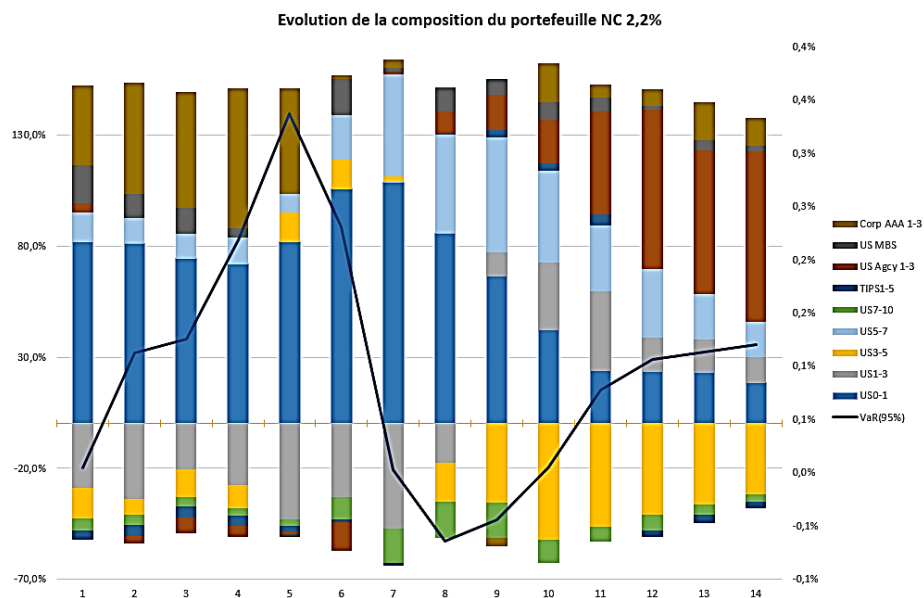
Source : Notre propre analyse avec le logiciel Excel.

Comme nous pouvons le remarquer sur le graphique 13, cette démarche propose toujours des portefeuilles concentrés. Même si l'on assiste à l'intégration de certaines classes d'actifs à la 8^{ème} et 9^{ème} période, celle-ci est éphémère et reste négligeable en termes de poids accordés. Par ailleurs, nous pouvons aussi remarquer que la composition affiche une importante variation périodique, ce qui n'est pas soutenable dans le cadre d'une allocation stratégique. Bien que l'on assiste à une certaine omniprésence du benchmark US 0-1, nous pouvons voir la disparition brusque du benchmark Corporate et l'apparition du benchmark US Agency 1-3 avec un poids

conséquent à partir du 7^{ème} mois, et jusqu'à la fin de notre série (fin septembre 2017). Pour ce qui est de la VaR-GARCH, nous pouvons voir qu'elle s'ajuste à chaque période indiquant ainsi l'évolution du risque en termes de volatilité sur les marchés considérés.

- **Portefeuille contraint à rendement annuel objectif 2,2% :**

Figure 15: Evolution de la composition du portefeuille 2 non-contraint



Source : Notre propre analyse avec le logiciel Excel.

A l'instar du portefeuille non-contraint précédent, ce portefeuille présente une meilleure diversification pour un rendement annuel de 2,2% que le portefeuille contraint. En effet, il considère les 9 classes d'actifs pour quasiment toutes les périodes. Toutefois, rappelons le grand inconvénient des positions courtes qu'il suggère. Ce qui est aussi remarquable, c'est la forte variation de ses composantes. En effet, même si vu ainsi, cette méthodologie nous permet de détecter des tendances qui peuvent être bénéfiques pour la phase de suivi du portefeuille politique, elle n'est guère appropriée pour proposer une allocation stratégique en un point de donné de temps qui présente un certain minimum de stabilité pour un horizon raisonnable. Enfin, concernant la VaR-GARCH, bien qu'elle affiche des valeurs moins importantes, elle renseigne sur un environnement de risque qui fluctue quelque peu à l'instar de l'approche contrainte. Ceci est d'une utilité

non négligeable puisqu'à chaque période, l'investisseur dispose du niveau de risque réel que son portefeuille est en train de supporter.

Nous pouvons dire désormais que les importantes variations des compositions suggérées par cette méthode est une grande limite. En effet, cette variabilité d'un point de vue pratique se présente comme une variable à minimiser dû aux coûts conséquents des rééquilibrages qu'elle implique. L'idéal serait d'avoir des compositions qui varient d'une façon lisse, et dans un même sens, ce qui est loin d'être le cas pour cette approche, qui en plus présente l'inconvénient de proposer des portefeuilles hautement concentrés.

Conclusion :

Nous avons vu dans ce chapitre que pour estimer la matrice des covariances dynamiques il faut passer par différentes étapes au préalable. Nous avons donc étudié la normalité et la stationnarité des séries étudiées pour pouvoir estimer les modèles en moyennes, en l'occurrence de type ARMA. Puis, à la lumière de ces derniers, nous avons analysé les autocorrélations sérielles et partielles des résidus élevés au carré desdits modèles en recourant à certains tests recommandés par la littérature afin de détecter l'opportunité de procéder à une modélisation adéquate de la volatilité. Nous avons présenté théoriquement les modèles auxquels nous avons eu recours, puis nous avons procédé à leur estimation. Ceci fait, nous avons pu calculer la VaR-GARCH selon cette approche et la comparer à d'autres méthodologies. Nous avons trouvé l'évidence que celle-ci est plus appropriée tel que suggéré par Engle (2002). Par ailleurs, nous avons aussi trouvé que le recours aux modèles asymétriques fournit des VaRs plus appropriées, en répondant correctement aux innovations négatives, en d'autres termes, les mauvaises nouvelles, ce qui généralement appelé dans la littérature « l'effet de levier ». Nous avons par la suite procédé à l'estimation des volatilités prévisionnelles sur des observations hors-échantillon. Les résultats prévisionnels ont été satisfaisants et ont démontré la supériorité de cette démarche par rapport à d'autres approches améliorées pour le calcul de la VaR.

Par la suite, nous avons dû recourir à l'estimation de la copule de Student qui nous a fourni des résultats satisfaisants si nous les comparons aux distributions des corrélations historiques (voir les annexes). 36 copules au total ont été estimées pour pouvoir procéder à la construc-

tion de la matrice des covariances. Avant de continuer, nous avons aussi effectué une simulation Monte-Carlo sur un portefeuille équipondéré en tant que test de robustesse pour valider les modèles de volatilité et le VaR ainsi calculée. Sur la base d'un nombre important de pas générés (1000 pas), les résultats étaient satisfaisants et ont corroboré ce qui a été trouvé précédemment.

Enfin, nous avons pu effectuer au total 78 optimisations (dont 26 en annexe) en nous basant sur les observations hors-échantillon. Ces dernières ont été effectuées dans le cadre de l'approche moyenne-variance contrainte et non-contraintes pour différents niveaux de rendements. Tel que suggéré dans la littérature, nous avons trouvé l'évidence que les compositions présentent un niveau élevé de concentration et une importante sensibilité aux changements des inputs. D'après nos résultats, cette sensibilité est une fonction croissante du couple risque rendement. En effet, pour le portefeuille efficient à risque minimal, la variation des composantes est à la rigueur acceptable. Toutefois, il apparaît qu'à chaque pas de la matrice des covariances, l'on assiste à une variation de plus en plus importante des composantes du portefeuille (+/-5%) à chaque fois que l'on avance à la droite de la frontière efficiente. Ce comportement n'est pas commode, aussi bien d'un point de vue stratégique, que d'un point de vue opérationnel. La raison est que cette variabilité induit des coûts de rééquilibrage conséquents et expose l'investisseur à d'autres familles de risque financier, notamment un risque de taux, en cas de vente en « *Mark-to-Market* », et un risque de liquidité significatifs. De ce fait, nous avons conclu que cette approche ne peut être acceptable que pour de faibles niveaux de risque/rendement (à l'extrémité gauche de la frontière efficiente). Toutefois, si l'on vise des portefeuilles plus risqués, cette approche ne pourrait, à la rigueur, que fournir une lecture prospective et tendancielle sur les classes d'actifs candidates à considérer, mais en aucun cas un portefeuille stable sur un horizon d'investissement stratégique.

Conclusion générale

Dans le présent travail, nous nous sommes intéressés au processus de l'allocation stratégique d'actifs. Nous avons vu que ce dernier est la résultante de la confrontation des objectifs et des contraintes de long-terme de l'investisseur avec sa lecture des conditions futures des marchés. A partir de là, un portefeuille, dit politique, est construit afin de fixer une allocation optimale à laquelle un investisseur « discipliné » doit se conformer afin d'atteindre ses objectifs en termes de rendement et de risque. En effet, d'après Blake et al (1999) et différents travaux dans la littérature, ce processus expliquerait jusqu'à 99,6% de la variation des rendements d'un portefeuille. Nous avons aussi présenté les différentes méthodes d'optimisation pour la construction de la composition stratégique optimale, ainsi que leurs forces et faiblesses. Puis, pour essayer de rendre ce processus plus intelligible, nous avons présenté le processus d'allocation stratégique de la banque centrale de Tunisie, depuis la phase d'identification des obligations et des contraintes, jusqu'à la phase d'implémentation de l'allocation stratégique. En effet, ledit processus livre *in fine* une recommandation qui permet à l'investisseur, au moyen d'une vision en *forward-looking* sur les conditions de long-terme des marchés, d'avoir le meilleur rendement possible sous la contrainte de son profil de risque. De ce fait, c'est l'attitude de l'investisseur envers le risque qui est l'élément déterminant. Dès lors, une estimation correcte et réaliste dudit risque s'impose. Chemin faisant, nous avons introduit une mesure communément admise aussi bien sur le plan théorique que pratique et même sur le plan réglementaire pour le cas des entités commerciales, en l'occurrence, la *Value at Risk*. Nous avons présenté les différents aspects théoriques de ce concept, et les différents paradigmes de son calcul. Ces derniers étant déterminants pour la qualité des estimations de la VaR, ainsi que le contenu informationnel qu'elle contient. En effet, ce contenu informationnel peut être crucial pour un investisseur hautement discipliné qui se conforme aux contraintes qu'il s'est fixées. Dans cette partie nous avons vu que la VaR est un proxy qui allie probabilité et volatilité. Ces dernières étant intimement liées par la distribution sous-jacente à tout processus aléatoire, et notamment dans le cadre de l'évolution des prix et des rendements financiers. Ceci nous a conduits à considérer un cas pratique qui analyse la nature des processus de certains benchmarks de titres à revenus fixes sur le marché US, afin de pouvoir effectuer un exercice d'allocation stratégique sur un portefeuille libellé en dollar.

De ce fait, nous avons choisi 9 benchmarks tels que construits par Merrill Lynch BoA, et nous avons considéré une période de près de 14 années, qui s'étale de début 2004 au troisième trimestre de 2017. Nous avons vérifié que toutes ces séries étaient stationnaires, en recourant aux tests de Dickey-Fuller et Phillips-Perron. Nous avons aussi effectué le Test Jarque-Bera qui a rejeté l'hypothèse de normalité pour toutes les séries. Par la suite, nous avons pu ajuster un modèle ARMA pour chaque série afin de pallier au problème d'autocorrélation sérielle et partielle. Nous avons vérifié ceci grâce au test LM de Breusch-Godfrey. Toutefois, ces autocorrélations sérielles et partielles restaient toujours présentes quand nous avons considéré le carré des résidus des modèles ARMA. Ceci suggérait l'existence d'un effet ARCH, ce qui a été confirmé par le test LM Engle. Nous avons alors pu ajuster, pour chaque série, un modèle de la famille ARCH que nous avons présenté plus haut. Dans cette phase, nous nous sommes référés aux critères d'information AIC et SIC ainsi qu'à la statistique Log-likelihood afin de choisir nos modèles. De plus, et puisque notre approche considère non seulement les volatilités des séries, mais aussi leurs distributions de probabilité. Nous avons, donc, d'une part, considéré des modèles qui répondent à certains critères théoriques, en l'occurrence, des spécifications prenant en compte des faits généralement avérés dans la réponse de volatilité, notamment, les effets d'asymétrie et de magnitude, tout en enlevant les éventuels effets ARCH résiduels. D'autre part, nous nous sommes assurés de l'acceptation de l'hypothèse de normalité quant aux résidus standardisés obtenus à partir desdits modèles. A partir de là, nous avons pu estimer avec une assurance raisonnable la VaR de chaque série. Nous avons procédé à la comparaison des résultats de la VaR ainsi obtenue avec l'approche historique et l'approximation de Cornish-Fisher, ainsi qu'une approche hybride combinant l'approche paramétrique Delta-Gamma à l'approche de simulation historique en considérant non plus les rendements en tant que facteur de risque, mais la variation des taux d'intérêt tels qu'estimés par le modèle Nelson-Siegel. Nos résultats, qui sont basés sur le nombre des violations, ont suggéré la supériorité globale de la VaR-GARCH aux autres méthodes. De plus, cette approche est plus riche en contenu informationnel, puisqu'elle reflète le niveau de volatilité effectivement présent sur le marché en temps opportun et présente une capacité de prévision intéressante qui peut servir de base pour le développement d'une vision en *forward-looking* dans le processus de l'allocation stratégique d'actifs, ainsi que dans la phase de suivi *ex-post*. Cela étant fait, nous avons procédé à l'estimation de la copule de Student afin d'associer une distribution jointe à chaque couple présent dans notre échantillon. Cette approche a l'avantage de garder les spécificités de la distribution marginale de chaque série, tout en prenant en compte une structure de corrélation qui considère les variations con-

jointes des rendements lors des mouvements extrêmes, qu'ils soient d'ailleurs positifs ou négatifs. Ainsi, nous avons pu construire une matrice de variances-covariances dynamiques qui nous a été par la suite indispensable pour effectuer les optimisations de portefeuilles. Mais avant de passer aux dites optimisations, nous avons eu recours à la décomposition de Cholesky qui nous a permis d'effectuer une simulation Monte-Carlo afin de nous assurer de la robustesse de nos différentes spécifications. Les résultats de ce test ont été satisfaisants, réitérant la validité de l'approche VaR-GARCH dans ce contexte. Enfin, et dans le cadre de l'approche moyenne-variance classique, nous avons pu conduire différentes constructions de portefeuilles en prenant en compte le portefeuille efficient de variance minimale, et un autre portefeuille présentant un couple risque/rendement plus élevé. Les résultats trouvés corroborent les critiques adressées à cette approche dans la littérature. En effet, pour le portefeuille efficient à variance minimale, nous avons eu des portefeuilles très concentrés et négligeant la plupart des classes d'actifs, et ce sans considérer l'effet dynamique de la volatilité. Cette concentration est d'autant plus exprimée dans le cadre contraint que dans le cadre non-contraint. Or, nous savons que l'approche contrainte est celle qui est communément admise pour la construction des portefeuilles politiques. Quant à l'aspect dynamique, nous avons trouvé que la variation des composantes du portefeuille efficient à variance minimale n'a pas dépassé le seuil de 5% pour les 11 premiers mois des observations hors-échantillon considérées, et n'a affiché une variation de près de 15% qu'à la fin de ladite période, ce qui peut être considéré comme orthodoxe dans le cadre de l'allocation stratégique. En effet, celui-ci qui prévoit plus d'une révision de la composition du portefeuille politique sur l'horizon d'une année. Toutefois, cette stabilité relative n'a pas été vérifiée quand nous avons augmenté le couple risque/rendement objectif. Les résultats des optimisations ont suggéré une forte instabilité du contenu du portefeuille. Ceci est naturellement incompatible avec un cadre stratégique de long-terme, hormis le fait que cela induit des coûts de transactions conséquents, ainsi que des risques supplémentaires à l'instar du risque de taux et du risque de liquidité. Nous avons, par ailleurs, noté que pour le cas du portefeuille non-contraint, la variation des composantes, quoiqu'importante, présente un aspect plus lisse en termes de classes d'actifs considérées. En d'autres termes, ce portefeuille, par contraste, au portefeuille contraint, présente l'avantage d'afficher des tendances plus claires sur l'horizon analysé. Cela peut être, tant soit peu, utile pour se forger une première idée sur les classes d'actifs à considérer dans l'avenir, et inversement les classes d'actifs à éviter, en se basant naturellement sur une analyse économique et financière plus fondée.

Cela étant dit, le présent travail n'a considéré que l'approche moyenne-variance classique pour procéder à la construction des portefeuilles. Il serait intéressant de vérifier la même approche

sur des méthodes réputées plus stables, à l'instar de l'approche bayésienne Black-Litterman et ses différentes extensions et de l'approche empirique de moyenne-variance rééchantillonnée. Nous ajoutons, par ailleurs, que dans cette étude nous n'avons considéré le dynamisme que pour la volatilité. Or, la réalité est que même les corrélations entre les classes d'actifs présentent un aspect dynamique et conditionnel. De ce fait, la prise en compte de cet effet, peut s'avérer intéressante, en recourant éventuellement à l'approche Copula-GARCH proposée par Jondeau et Rockinger (2006)⁷³. En outre, il serait aussi intéressant de recourir aux modèles non linéaires dynamiques qui sont en train de gagner en popularité dans le cadre d'allocation d'actifs. Nous avons notamment en tête l'approche Markov-Switching GARCH proposée par Simi (2013)⁷⁴ qui visait expressément l'allocation stratégique d'actifs dynamique.

⁷³ Eric Jondeau and Michael Rockinger, The Copula-GARCH model of conditional dependencies: An international stock market application, 2006, *Journal of International Money and Finance*, Volume 25, Issue 5, August 2006, Pages 827-853

⁷⁴ Wei W. Simi, Strategic Asset Allocation and Markov Regime Switch with GARCH, 2013, *Journal of Business & Economic Studies*, Vol. 19, No. 1, Spring 2013.

- [1.] Sklar. Fonction de répartition dont les marges sont données, 1959. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8 :229–231, 1959.
- [2.] Amenc N., Le Sourd V. (2003): *Portfolio Theory and Performance Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester.
- [3.] ARCH, unpublished manuscript, University of California, San Diego
- [4.] Artzner P., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. “Coherent Measures of Risk.” *Mathematical*
- [5.] Baba, Y., R.F. Engle, D. Kraft, and K.Kroner [1990], *Multivariate simultaneous generalized*
- [6.] Best M.J., Grauer R.R. (1991): On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results. “*The Review of Financial Studies*” January, Vol. 4, No. 2, pp. 315-342.
- [7.] Black F., Litterman R. (1992): Global Portfolio Optimization. “*Financial Analysts Journal*” September/October, Vol. 48, No. 5, pp. 28-43.
- [8.] Blake, D., Lehmann, B., Timmerman, A. (1999), *Asset Allocation Dynamics and Pension Fund Performance*, *Journal of Business*, Vol. 72, pp. 429-61.
- [9.] Bollerslev, T. (1990), “Modeling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model,” *Review of Economics and Statistics*, 72, 498-505.
- [10.] Bollerslev, T., Wooldridge, J.M., 1992. Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Reviews* 11, 143–172.
- [11.] Bollerslev, Tim. 1986. “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.” *Journal of Econometrics*. April, 31:3, pp. 307–27.
- [12.] Boudoukh, J., M. Richardson and R. Whitelaw, 1998. "The Best of Both Worlds," *Risk*, v11, 64-67.
- [13.] Breusch, T. S. (1978). "Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models". *Australian Economic Papers*. Godfrey, L. G. (1978). "Testing Against General Autoregressive and Moving Average Error Models when the Regressors Include Lagged Dependent Variables". *Econometrica*. 46: 1293–1301.
- [14.] Brinson, Gary P., Brian D. Singer, and Gilbert L. Beebower, 1991. Determinants of Portfolio Performance II: An Update. *Financial Analysts Journal* 47(3):40-8.
- [15.] Brinson, Gary P., L. Randolph Hood, and Gilbert L. Beebower, “Determinants of Portfolio Performance,” *Financial Analysts Journal*, July-August 1986, pp. 39-44.
- [16.] Albanese, K. Jackson, and P. Wiberg. A new fourier transform algorithm for value-at- risk. *Quantitative Finance*, 4(3):328–338, 2004
- [17.] Cabedo J. David, Moya Ismael, 2003. Estimating oil price value-at risk using historical simulation approach. *Energy Economics* 25, 239–253.
- [18.] David Dickey and Wayne A Fuller, *Econometrica*, 1981, vol. 49, issue 4, pages 1057-72

- [19.] Dickey, D.A., Fuller, W.A., 1979. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Society* 75, 427–431.
- [20.] Engle, R., 2001, Garch 101: The Use of ARCH and GARCH models in Applied Econometrics, *Journal of Economic Perspectives*, v15, 157-168.
- [21.] Engle, R.F. (2002a), “Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate GARCH Models,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 339-350.
- [22.] Engle, R.F. and G.G.J. Lee (1999), “A Permanent and Transitory Component Model of Stock Return Volatility,” in R.F. Engle and H. White (eds.), *Cointegration, Causality, and Forecasting: A Festschrift in Honor of Clive W.J. Granger*, 475-497. Oxford, UK: Oxford University Press.
- [23.] Engle, Robert F. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation". *Econometrica*. 50 (4): 987–1007.
- [24.] Engle, Robert F. 1982. “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation.” *Econometrica*. 50:4, pp. 987–1007.
- [25.] Engle, Robert, Takatoshi Ito and Wen-Ling Lin. 1990. “Meteor Showers or Heat Waves? Heteroskedastic Intra-Daily Volatility in the Foreign Exchange Market.” *Econometrica*. May, 58:3, pp. 525–42.
- [26.] Eric Jondeau and Michael Rockinger, The Copula-GARCH model of conditional dependencies: An international stock market application, 2006, *Journal of International Money and Finance*, Volume 25, Issue 5, August 2006, Pages 827-853
- [27.] F. Black and M Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 81 (1973), 637-654.
- [28.] Frye, J., 1997, “Principals of Risk: Finding Value-at-Risk Through Factor-Based Interest Rate Scenarios.” NationsBanc-CRT.
- [29.] G. M. Ljung and G. E. P. Box, “On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models,” *Biometrika*, 65 (1978): 297–303.
- [30.] G. M. Ljung; G. E. P. Box (1978). "On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models". *Biometrika*. 65 (2): 297–303.
- [31.] Garbade, Kenneth D. (1986). « *Assessing risk and capital adequacy for Treasury securities* », Topics in Money and Securities Markets, 22, New York : Bankers Trust.
- [32.] Glasserman, P., P. Heidelberger and P. Shahabuddin, 2000, Efficient Monte Carlo Methods for Value at Risk, Working Paper, Columbia University.
- [33.] Glosten, L.R., R. Jagannathan and D. Runkle (1993), “On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks,” *Journal of Finance*, 48, 1779-1801.
- [34.] Glyn A. Holton. (2002). « *History of Value-at-Risk : 1922-1998* », Working Paper July 25, 2002
- [35.] H. Solomon and Stephens M. A. Distribution of a sum of weighted chi-square variables. Technical report, 1977.
- [36.] Hull, J. and A. White “Value at Risk when Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed,” *Journal of Derivatives*, Spring 1998, pp 9-19.

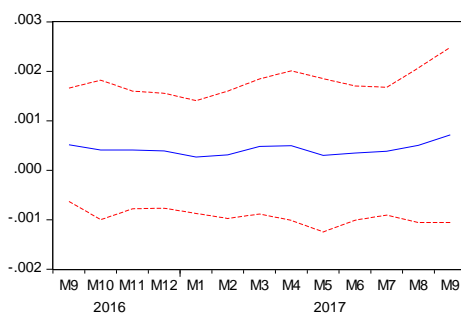
- [37.] Hull, J. and A. White, 1998, Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk, *Journal of Risk*, v1, 5-19.
- [38.] Ibbotson, Roger G., Paul D. Kaplan. 2000. "Does Asset Allocation Policy Explain 40, 90, or 100 Percent of Performance ?" *Financial Analysts Journal*, vol. 56, no. 1 (January/February):26–33
- [39.] Idzorek T. (2006): Developing Robust Asset Allocations. Working paper. "Ibbotson Research Paper" 18 April.
- [40.] J.C. Hull (2000), *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, Upper Saddle River, chapitre 14.
- [41.] Jamshidian, Farshid and Yu Zhu, 1997, "Scenario Simulation: Theory and Methodology." *Finance and Stochastics*, v1, 43-67.
- [42.] Jarque, C.M. and, Bera A.K, A test for normality of observations and regression residuals, *Int. Statistical Review* , 55, (1987), 163 – 172.
- [43.] JPMorgan, RiskMetrics Monitor, Fourth Quarter, 1995
- [44.] Kritzman Mark and Sébastien Page. "The Hierarchy of Investment Choice," *Journal of Portfolio Management*, Vol.29, Iss.4 Summer 2003, 11-23.
- [45.] Kritzman, M. (1999), 'Toward Defining an Asset Class', *The Journal of Portfolio Management* 2(1), pp. 79–82.
- [46.] Litterman, R. and Winkelmann, K. (1998). "Estimating Covariance Matrices." *Risk Management Series*, Goldman Sachs & Company, January.
- [47.] M. Britten-Jones and S.M. Schaefer. Non-linear value-at-risk. *European Finance Review*, 2(2):161, 1999.
- [48.] Macaulay, F. *Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. since 1856*. New York, NY: National Bureau of Economic Research, 1938.
- [49.] Markowitz H.M. (1952). *Portfolio Selection*. "The Journal of Finance" March, Vol. 7, pp. 77-91.
- [50.] Markowitz H.M. (1952). *Portfolio Selection*. "The Journal of Finance" March, Vol. 7, pp. 77-91. Markowitz H.M. (1959): *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Wiley, NewYork.
- [51.] Michaud R.O. (1998): *Efficient Asset Management*. Harvard Business School Press, Boston.
- [52.] Nelson D.(1991) "Conditional Heteroskedasticity in asset returns: A new approach", *Econometrica*, 59,347-370.
- [53.] Nelson, C. R. and A. F. Siegel (1987), Parsimonious Modeling Of Yield Curves, *Journal of Business*, 60, 473–489.
- [54.] Nelson, C.R., and A.F. Siegel (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business* 60, 473-489.
- [55.] Nelson, Daniel B. 1991. "Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A New Approach." *Econometrica*. 59:2, pp. 347–70.
- [56.] P. Zangari. A var methodology for portfolios that include options. *RiskMetrics Monitor*, 1:4–12, 1996.
- [57.] Phillips, P. C. B.; Perron, P. (1988). "Testing for a Unit Root in Time Series Regression". *Biometrika*. 75 (2): 335–346

- [58.] Qian, Edward and Gorman, Stephen (2001). "Conditional Distribution in Portfolio Theory", *Financial Analysts Journal*, September, 2001.
- [59.] R. Brummelhuis, A. Cordoba, M. Quintanilla, and L. Seco. Principal component value at risk. *Mathematical Finance*, 12(1):23–43, 2002.
- [60.] R. Engle "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation," *Econometrica*, 50 (1982): 987–1008.
- [61.] *RiskMetrics – Technical Document, J.P. Morgan, December 17, 1996; Zangari, P., 1996, An Improved Methodology for Computing VaR, J.P. Morgan RiskMetrics Monitor, Second Quarter 1996.*
- [62.] S.R. Jäschke. The cornish-fisher expansion in the context of delta-gamma-normal approximations. *Journal of Risk*, 4:33–52, 2002. Et S. Pichler and K. Selitsch. A comparison of analytical var methodologies for portfolios that include options. *Model risk, concepts, calibration, and pricing*, 2000.
- [63.] Scherer, B. (2002) Portfolio Resampling: Review and Critique, *Financial Analysts Journal*, Vol. 58, No. 6, pp. 98-109
- [64.] Sharpe W. (1992): Asset Allocation: Management Style and Performance Measurement. "Journal of Portfolio Management", Vol. 18, No. 2.
- [65.] Sharpe, William F. (1964). *Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*, *Journal of Finance*, 19 (3), 425-442
- [66.] Sharpe, William F., et al. [1964]. "Capital Asset Prices: A Theory Of Market Equilibrium Under Conditions Of Risk," *Journal of Finance* 19 (3): 425-442.
- [67.] Sims, C. A., 1980, « Macroeconomics and Reality », *Econometrica*, vol. 48 (1), pp. 1-48.
- [68.] T. Bollerslev, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity," *Journal of Econometrics*, 31 (1986): 307–27.
- [69.] Wei W. Simi, Strategic Asset Allocation and Markov Regime Switch with GARCH, 2013, *Journal of Business & Economic Studies*, Vol. 19, No. 1, Spring 2013.
- [70.] William F. **Sharpe**, The Arithmetic of Active Management, *Financial Analysts Journal*, January/February **1991**, Vol. 47, No. 1: 7-9.
- [71.] Wilson, Thomas (1993). Infinite wisdom, *Risk*, 6 (6), 37-45.
- [72.] Zakoian, J. M. (1991). Threshold heteroskedastic models, Technical report, INSEE

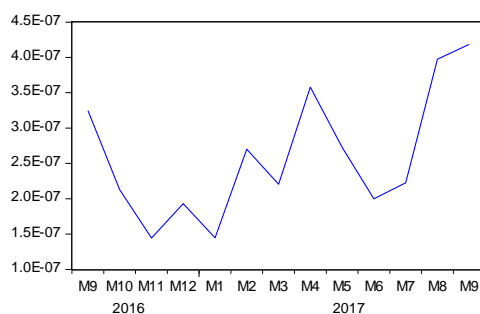
Annexes : résultats des estimations des modèles et des prévisions de la volatilité

Dependent Variable: US0_1
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 11/15/17 Time: 13:07
 Sample (adjusted): 2004M03 2016M08
 Included observations: 150 after adjustments
 Convergence achieved after 39 iterations
 Bollerslev-Wooldridge robust standard errors & covariance
 MA Backcast: 2004M01 2004M02
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(4) + C(5)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(6)
 *LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.966800	0.027041	35.75361	0.0000
MA(1)	-0.930261	0.113173	-8.219798	0.0000
MA(2)	0.262209	0.080960	3.238760	0.0012
Variance Equation				
C(4)	-0.922701	0.393427	-2.345293	0.0190
C(5)	0.622720	0.117549	5.297541	0.0000
C(6)	0.969718	0.023304	41.61113	0.0000
R-squared	0.702534	Mean dependent var	0.001280	
Adjusted R-squared	0.698487	S.D. dependent var	0.001680	
S.E. of regression	0.000923	Akaike info criterion	-12.25394	
Sum squared resid	0.000125	Schwarz criterion	-12.13351	
Log likelihood	925.0452	Hannan-Quinn criter.	-12.20501	
Durbin-Watson stat	1.280495			
Inverted AR Roots	.97			
Inverted MA Roots	.47-.21i	.47+.21i		



Forecast: US0_1F	
Actual: US0_1	
Forecast sample: 2016M09 2017M09	
Included observations: 13	
Root Mean Squared Error	0.000423
Mean Absolute Error	0.000333
Mean Abs. Percent Error	140.1668
Theil Inequality Coefficient	0.373805
Bias Proportion	0.133576
Variance Proportion	0.380965
Covariance Proportion	0.485459



— Forecast of Variance

Annexes : résultats des estimations des modèles et des prévisions de la volatilité

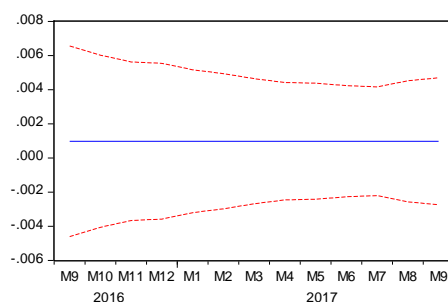
Dependent Variable: US1_3
 Method: ML - ARCH
 Date: 10/29/17 Time: 14:42
 Sample: 2004M02 2016M08
 Included observations: 151
 Convergence achieved after 27 iterations
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

$$\text{LOG}(\text{GARCH}) = \text{C}(2) + \text{C}(3) \cdot \text{ABS}(\text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)}) + \text{C}(4) \cdot \text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)} + \text{C}(5) \cdot \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$$

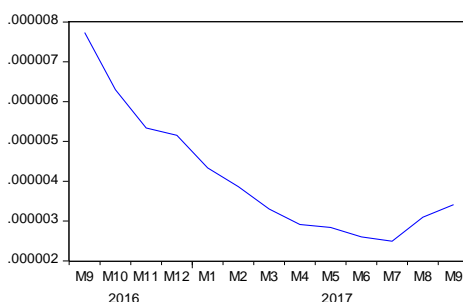
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000974	0.000220	4.426439	0.0000

Variance Equation				
C(2)	-1.394007	0.700098	-1.991159	0.0465
C(3)	0.271934	0.124429	2.185457	0.0289
C(4)	0.194899	0.103037	1.891549	0.0586
C(5)	0.901638	0.057001	15.81788	0.0000

R-squared	-0.051970	Mean dependent var	0.001829
Adjusted R-squared	-0.051970	S.D. dependent var	0.003766
S.E. of regression	0.003863	Akaike info criterion	-8.721159
Sum squared resid	0.002238	Schwarz criterion	-8.621249
Log likelihood	663.4475	Hannan-Quinn criter.	-8.680570
Durbin-Watson stat	1.424346		



Forecast: US1_3F	
Actual: US1_3	
Forecast sample: 2016M09 2017M09	
Included observations: 13	
Root Mean Squared Error	0.001765
Mean Absolute Error	0.001192
Mean Abs. Percent Error	105.5274
Theil Inequality Coefficient	0.674576
Bias Proportion	0.157524
Variance Proportion	NA
Covariance Proportion	NA



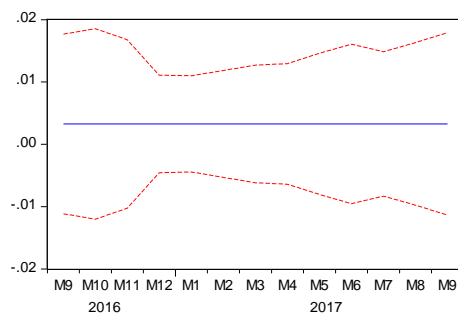
Annexes : résultats des estimations des modèles et des prévisions de la volatilité

Dependent Variable: US3_5
 Method: ML - ARCH
 Date: 10/29/17 Time: 14:52
 Sample: 2004M02 2016M08
 Included observations: 151
 Convergence achieved after 13 iterations
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $\text{LOG}(\text{GARCH}) = \text{C}(2) + \text{C}(3) \cdot \text{ABS}(\text{RESID}(-1)) / \text{SQRT}(\text{GARCH}(-1)) + \text{C}(4) \cdot \text{RESID}(-1) / \text{SQRT}(\text{GARCH}(-1)) + \text{C}(5) \cdot \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$

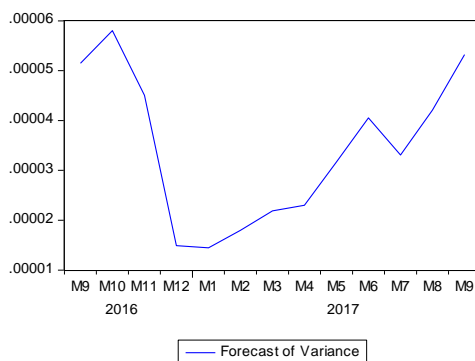
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.003260	0.000657	4.965317	0.0000

Variance Equation				
C(2)	-1.094282	0.446899	-2.448613	0.0143
C(3)	-0.181310	0.081852	-2.215104	0.0268
C(4)	0.271440	0.075728	3.584407	0.0003
C(5)	0.871251	0.047934	18.17596	0.0000

R-squared	-0.000635	Mean dependent var	0.003030
Adjusted R-squared	-0.000635	S.D. dependent var	0.009154
S.E. of regression	0.009157	Akaike info criterion	-6.691399
Sum squared resid	0.012578	Schwarz criterion	-6.591489
Log likelihood	510.2006	Hannan-Quinn criter.	-6.650810
Durbin-Watson stat	1.798054		



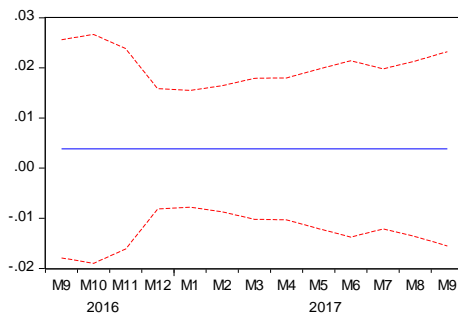
Forecast: US3_5F	
Actual: US3_5	
Forecast sample: 2016M09 2017M09	
Included observations: 13	
Root Mean Squared Error	0.006593
Mean Absolute Error	0.004229
Mean Abs. Percent Error	254.5334
Theil Inequality Coefficient	0.740657
Bias Proportion	0.268361
Variance Proportion	NA
Covariance Proportion	NA



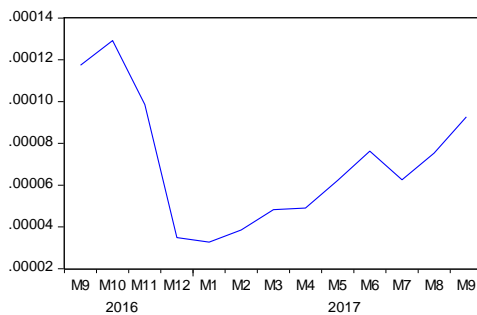
Annexes : résultats des estimations des modèles et des prévisions de la volatilité

Dependent Variable: US5_7
 Method: ML - ARCH
 Date: 10/29/17 Time: 14:57
 Sample: 2004M02 2016M08
 Included observations: 151
 Convergence achieved after 19 iterations
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 $\text{LOG}(\text{GARCH}) = \text{C}(2) + \text{C}(3) \cdot \text{ABS}(\text{RESID}(-1)) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)} + \text{C}(4) \cdot \text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)} + \text{C}(5) \cdot \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.003838	0.001056	3.635182	0.0003
Variance Equation				
C(2)	-0.527612	0.315610	-1.671718	0.0946
C(3)	-0.156458	0.073551	-2.127203	0.0334
C(4)	0.213063	0.073833	2.885757	0.0039
C(5)	0.926744	0.039956	23.19420	0.0000
R-squared	-0.000000	Mean dependent var	0.003838	
Adjusted R-squared	-0.000000	S.D. dependent var	0.013157	
S.E. of regression	0.013157	Akaike info criterion	-5.886641	
Sum squared resid	0.025967	Schwarz criterion	-5.786731	
Log likelihood	449.4414	Hannan-Quinn criter.	-5.846052	
Durbin-Watson stat	1.886091			



Forecast: US5_7F	
Actual: US5_7	
Forecast sample: 2016M09 2017M09	
Included observations: 13	
Root Mean Squared Error	0.010885
Mean Absolute Error	0.007108
Mean Abs. Percent Error	189.3735
Theil Inequality Coefficient	0.795168
Bias Proportion	0.187457
Variance Proportion	NA
Covariance Proportion	NA



Annexes : résultats des estimations des modèles et des prévisions de la volatilité

Dependent Variable: US7_10

Method: ML - ARCH

Date: 11/15/17 Time: 16:54

Sample: 2004M02 2016M08

Included observations: 151

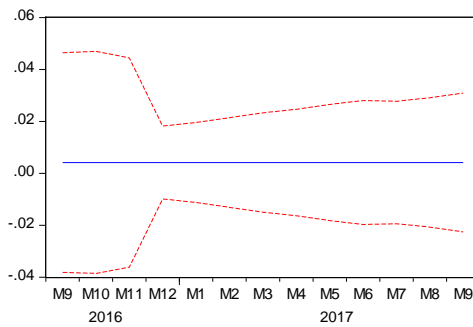
Convergence achieved after 10 iterations

Bollerslev-Wooldridge robust standard errors & covariance

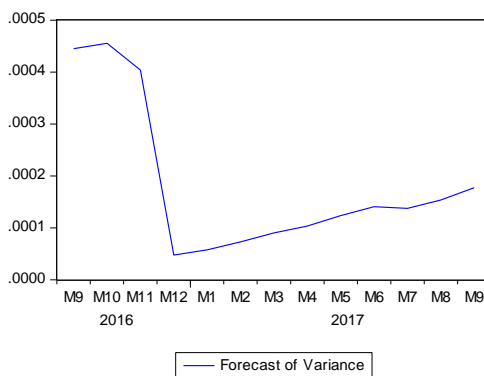
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

$$\text{GARCH} = C(2) + C(3) \cdot \text{RESID}(-1)^2 + C(4) \cdot \text{RESID}(-1)^2 \cdot (\text{RESID}(-1) < 0) + C(5) \cdot \text{GARCH}(-1)$$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.004129	0.001309	3.155502	0.0016
Variance Equation				
C	1.71E-05	9.33E-06	1.833830	0.0667
RESID(-1)^2	0.073799	0.021293	3.465854	0.0005
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	-0.264278	0.044020	-6.003586	0.0000
GARCH(-1)	0.990991	0.024118	41.08929	0.0000
R-squared	-0.000509	Mean dependent var	0.004531	
Adjusted R-squared	-0.000509	S.D. dependent var	0.017893	
S.E. of regression	0.017898	Akaike info criterion	-5.264175	
Sum squared resid	0.048050	Schwarz criterion	-5.164265	
Log likelihood	402.4452	Hannan-Quinn criter.	-5.223586	
Durbin-Watson stat	1.918343			



Forecast: US7_10F	
Actual: US7_10	
Forecast sample: 2016M09 2017M09	
Included observations: 13	
Root Mean Squared Error	0.015088
Mean Absolute Error	0.010164
Mean Abs. Percent Error	313.2713
Theil Inequality Coefficient	0.837264
Bias Proportion	0.172361
Variance Proportion	NA
Covariance Proportion	NA



Dependent Variable: TIPS1_5

Method: ML - ARCH

Date: 10/29/17 Time: 15:46

Sample: 2004M02 2016M08

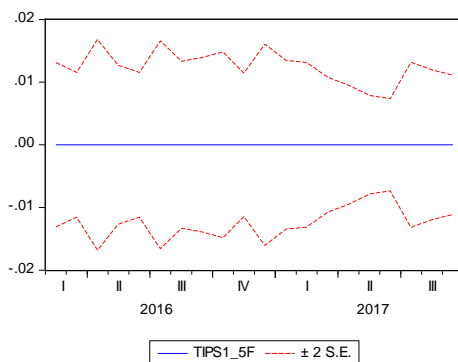
Included observations: 151

Convergence achieved after 120 iterations

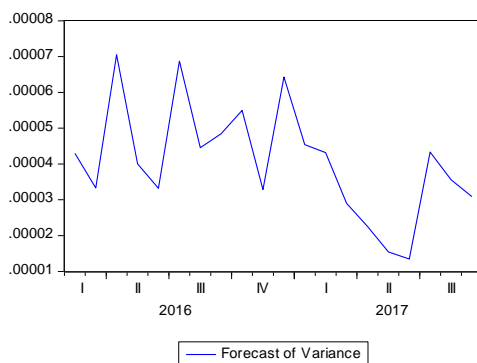
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

$$\text{LOG}(\text{GARCH}) = \text{C}(1) + \text{C}(2) * \text{ABS}(\text{RESID}(-1) / @\text{SQRT}(\text{GARCH}(-1))) + \text{C}(3) * \text{RESID}(-1) / @\text{SQRT}(\text{GARCH}(-1)) + \text{C}(4) * \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C(1)	-2.266313	0.795235	-2.849865	0.0044
C(2)	0.825895	0.152782	5.405699	0.0000
C(3)	-0.228091	0.079679	-2.862612	0.0042
C(4)	0.824084	0.080554	10.23027	0.0000
R-squared	-0.070046	Mean dependent var	0.002501	
Adjusted R-squared	-0.062960	S.D. dependent var	0.009480	
S.E. of regression	0.009774	Akaike info criterion	-6.677946	
Sum squared resid	0.014425	Schwarz criterion	-6.598018	
Log likelihood	508.1849	Hannan-Quinn criter.	-6.645475	
Durbin-Watson stat	1.607185			



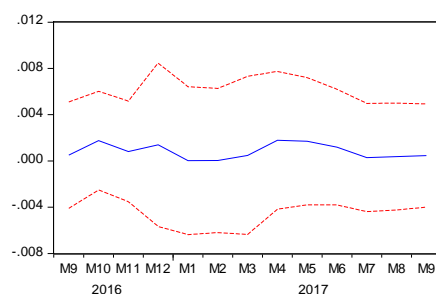
Forecast: TIPS1_5F	
Actual: TIPS1_5	
Forecast sample: 2016M02 2017M09	
Included observations: 20	
Root Mean Squared Error	0.004864
Mean Absolute Error	0.003571
Mean Abs. Percent Error	100.0000
Theil Inequality Coefficient	1.000000
Bias Proportion	0.100632
Variance Proportion	NA
Covariance Proportion	NA



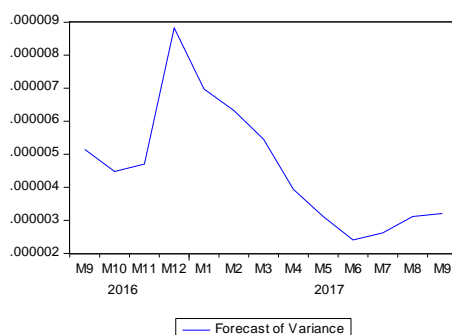
Annexes : résultats des estimations des modèles et des prévisions de la volatilité

Dependent Variable: US_AGEN_1_3
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 11/13/17 Time: 22:30
 Sample (adjusted): 2004M05 2016M08
 Included observations: 148 after adjustments
 Convergence achieved after 117 iterations
 MA Backcast: 2004M02 2004M04
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 LOG(GARCH) = C(4) + C(5)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(6)
 *LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000920	0.000166	5.539071	0.0000
AR(3)	-0.634770	0.096413	-6.583839	0.0000
MA(3)	0.833778	0.066206	12.59368	0.0000
Variance Equation				
C(4)	-0.581035	0.244598	-2.375472	0.0175
C(5)	0.435745	0.112828	3.862041	0.0001
C(6)	0.979729	0.017974	54.50729	0.0000
R-squared	-0.031960	Mean dependent var	0.002059	
Adjusted R-squared	-0.046194	S.D. dependent var	0.003511	
S.E. of regression	0.003591	Akaike info criterion	-8.964449	
Sum squared resid	0.001869	Schwarz criterion	-8.842940	
Log likelihood	669.3692	Hannan-Quinn criter.	-8.915080	
Durbin-Watson stat	1.415961			
Inverted AR Roots	.43+.74i	.43-.74i	-.86	
Inverted MA Roots	.47+.82i	.47-.82i	-.94	

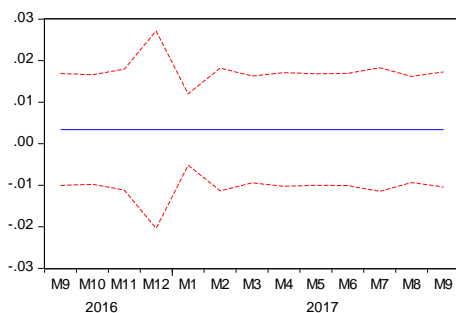


Forecast: US_AGEN_1_F	
Actual: US_AGEN_1_3	
Forecast sample: 2016M09 2017M09	
Included observations: 13	
Root Mean Squared Error	0.001787
Mean Absolute Error	0.001385
Mean Abs. Percent Error	269.1792
Theil Inequality Coefficient	0.665827
Bias Proportion	0.034268
Variance Proportion	0.274933
Covariance Proportion	0.690800

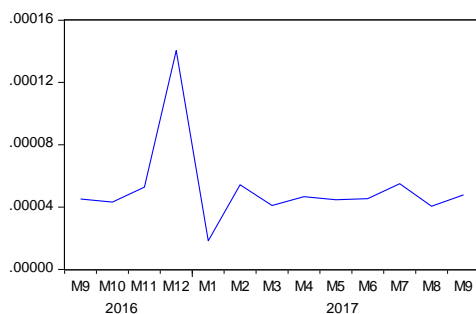


Dependent Variable: USMBS
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 11/15/17 Time: 18:23
 Sample: 2004M02 2016M08
 Included observations: 151
 Convergence achieved after 21 iterations
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.003400	0.000547	6.213732	0.0000
Variance Equation				
C	5.59E-05	1.01E-05	5.557298	0.0000
RESID(-1)^2	0.234181	0.071140	3.291814	0.0010
GARCH(-1)	-0.284650	0.110986	-2.564747	0.0103
R-squared	-0.001694	Mean dependent var	0.003704	
Adjusted R-squared	-0.001694	S.D. dependent var	0.007398	
S.E. of regression	0.007405	Akaike info criterion	-7.013369	
Sum squared resid	0.008224	Schwarz criterion	-6.933441	
Log likelihood	533.5094	Hannan-Quinn criter.	-6.980898	
Durbin-Watson stat	1.932606			



Forecast: USMBSF	
Actual: USMBS	
Forecast sample: 2016M09 2017M09	
Included observations: 13	
Root Mean Squared Error	0.006919
Mean Absolute Error	0.004863
Mean Abs. Percent Error	354.0713
Theil Inequality Coefficient	0.715073
Bias Proportion	0.181490
Variance Proportion	NA
Covariance Proportion	NA



Annexes : résultats des estimations des modèles et des prévisions de la volatilité

Dependent Variable: AAA1_3

Method: ML - ARCH

Date: 10/29/17 Time: 15:45

Sample: 2004M02 2016M08

Included observations: 151

Convergence achieved after 41 iterations

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

$Q = C(2) + C(3)*(Q(-1) - C(2)) + C(4)*(RESID(-1))^2 - GARCH(-1)$

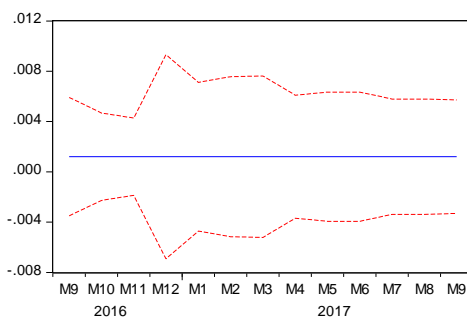
$GARCH = Q + (C(5) + C(6)*(RESID(-1) < 0))*(RESID(-1))^2 - Q(-1) + C(7)$
 $*(GARCH(-1) - Q(-1))$

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001199	0.000226	5.313883	0.0000

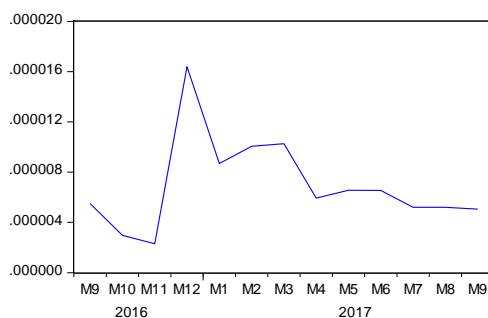
Variance Equation

C(2)	0.000356	0.001666	0.213669	0.8308
C(3)	0.999081	0.004686	213.2159	0.0000
C(4)	0.229924	0.059788	3.845633	0.0001
C(5)	-0.216000	0.048003	-4.499718	0.0000
C(6)	0.488460	0.140817	3.468750	0.0005
C(7)	0.827531	0.155930	5.307083	0.0000

R-squared	-0.044044	Mean dependent var	0.002328
Adjusted R-squared	-0.044044	S.D. dependent var	0.005396
S.E. of regression	0.005514	Akaike info criterion	-8.204202
Sum squared resid	0.004560	Schwarz criterion	-8.064328
Log likelihood	626.4172	Hannan-Quinn criter.	-8.147378
Durbin-Watson stat	1.645893		



Forecast: AAA1_3F	
Actual: AAA1_3	
Forecast sample: 2016M09 2017M09	
Included observations: 13	
Root Mean Squared Error	0.001926
Mean Absolute Error	0.001414
Mean Abs. Percent Error	166.1352
Theil Inequality Coefficient	0.602970
Bias Proportion	0.063864
Variance Proportion	NA
Covariance Proportion	NA



Annexes : résultats des estimations des copules (Student) et exemple graphique

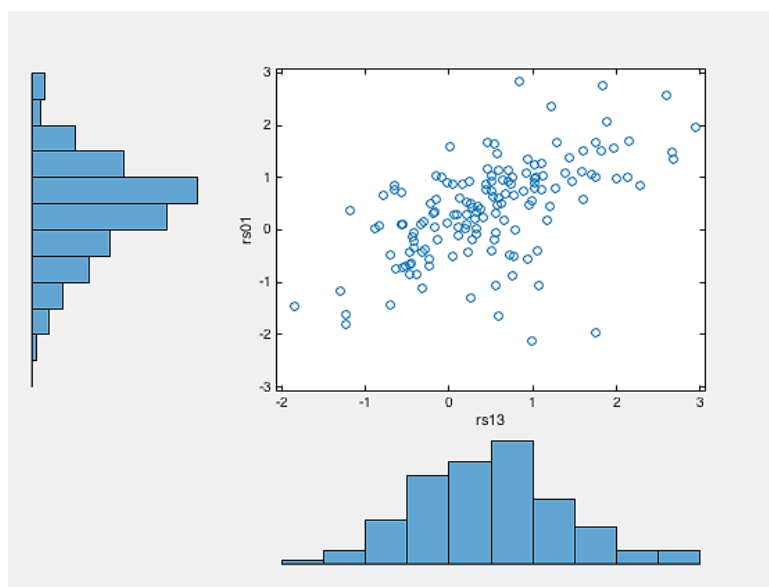
Matrice des corrélations

	<i>US0-1</i>	<i>US1-3</i>	<i>US3-5</i>	<i>US5-7</i>	<i>US7-10</i>	<i>TIPS1-5</i>	<i>US Agcy</i>	<i>US MBS</i>	<i>Corp</i>
<i>US0-1</i>	1	0,4085	0,3245	0,5134	0,3876	0,6186	0,466	0,5977	0,3701
<i>US1-3</i>	0,4085	1	0,9338	0,6895	0,4759	0,8422	0,9662	0,7951	0,8257
<i>US3-5</i>	0,3245	0,9338	1	0,6073	0,4208	0,7397	0,872	0,7103	0,8075
<i>US5-7</i>	0,5134	0,6895	0,6073	1	0,67	0,8132	0,7542	0,8289	0,6345
<i>US7-10</i>	0,3876	0,4759	0,4208	0,67	1	0,5745	0,5386	0,5708	0,4941
<i>TIPS1-5</i>	0,6186	0,8422	0,7397	0,8132	0,5745	1	0,9056	0,9074	0,7234
<i>US Agcy</i>	0,466	0,9662	0,872	0,7542	0,5386	0,9056	1	0,8456	0,8161
<i>US MBS</i>	0,5977	0,7951	0,7103	0,8289	0,5708	0,9074	0,8456	1	0,7453
<i>Corp</i>	0,3701	0,8257	0,8075	0,6345	0,4941	0,7234	0,8161	0,7453	1

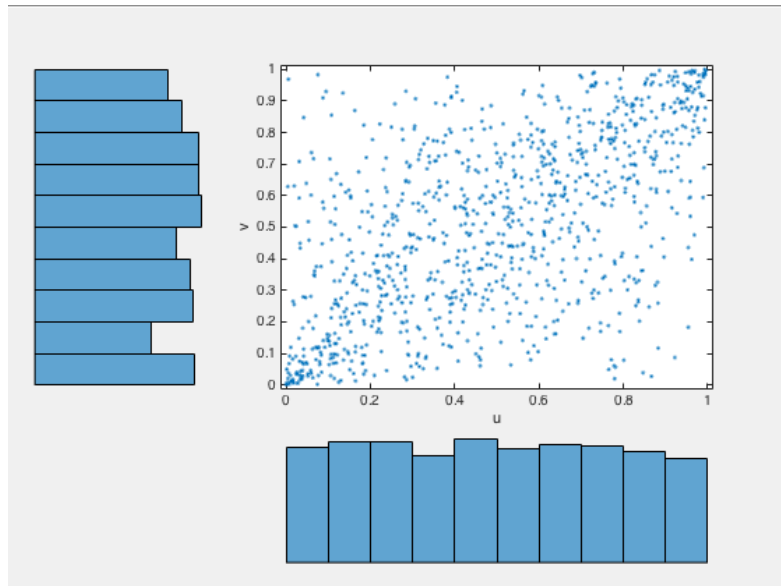
Degrés de liberté des copules bivariées

	<i>US0-1</i>	<i>US1-3</i>	<i>US3-5</i>	<i>US5-7</i>	<i>US7-10</i>	<i>TIPS1-5</i>	<i>US Agcy</i>	<i>US MBS</i>	<i>Corp</i>
<i>US0-1</i>	1								
<i>US1-3</i>	9,0137	1							
<i>US3-5</i>	386,6692	15171000	1						
<i>US5-7</i>	4,3153	8,1105	6,0484	1					
<i>US7-10</i>	3,0583	8,3953	6,6253	6,5927	1				
<i>TIPS1-5</i>	3,2211	655320	213,9368	2,6745	4,4181	1			
<i>US Agcy</i>	7,7995	7,069	13,5956	5,6424	5,0997	33,3148	1		
<i>US MBS</i>	8,4806	10,6002	15,3012	5,6094	8,602	6,3483	29,1502	1	
<i>Corp</i>	7,7335	12,7452	3396500	5,7309	5,3736	6,3519	5,3033	5,8209	1

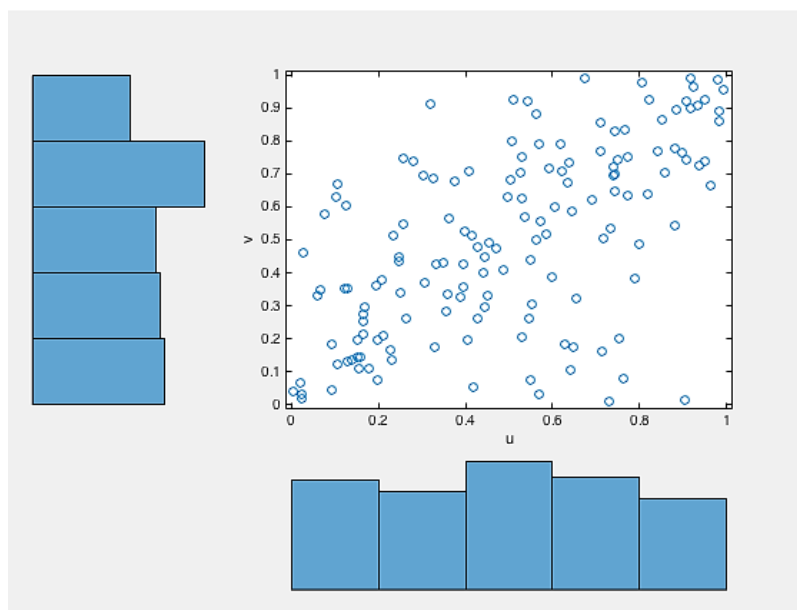
1^{ère} étape : ajustement du processus



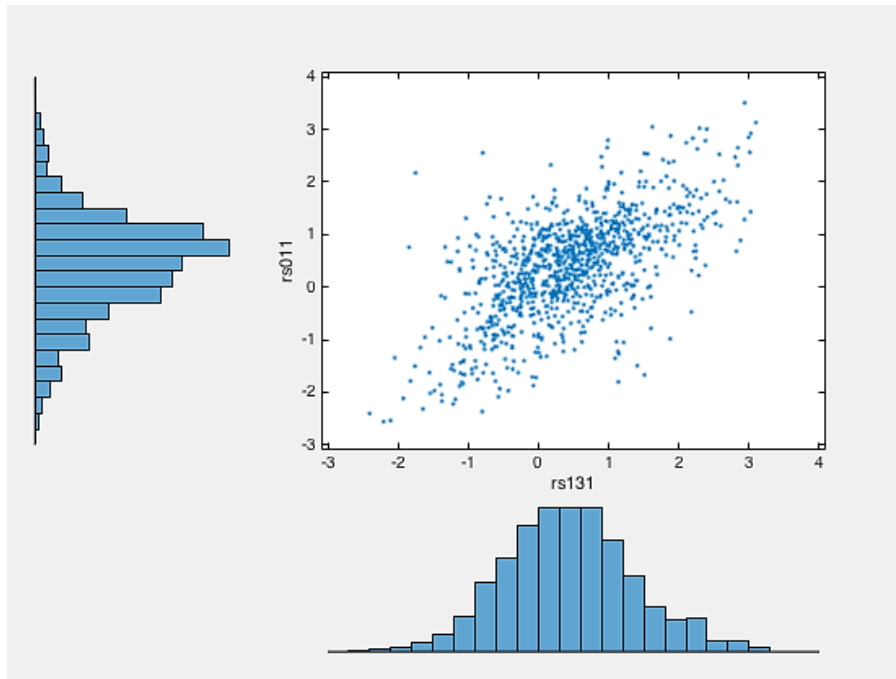
2^{ème} étape : uniformisation



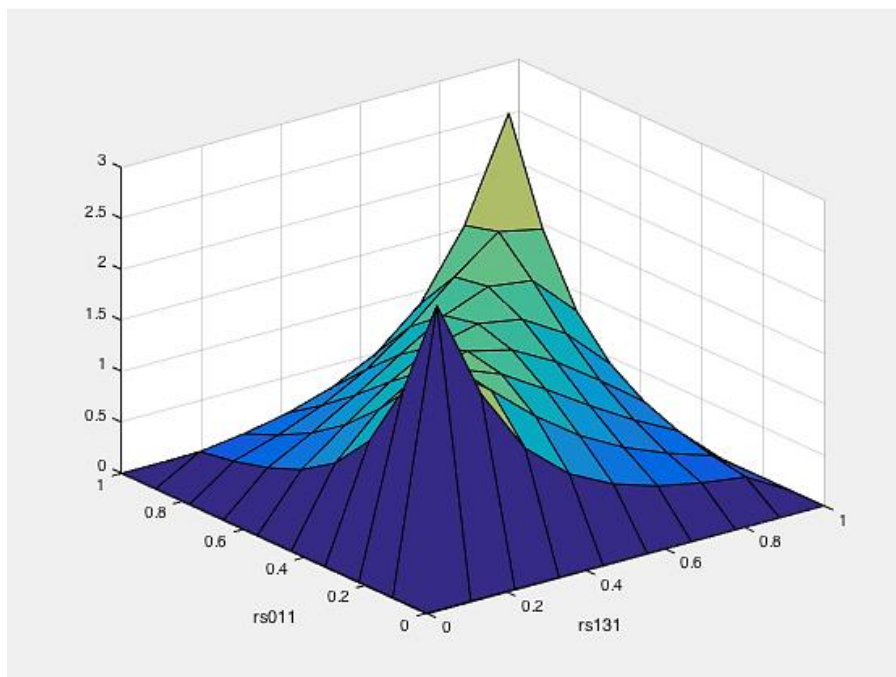
3^{ème} étape : simulation de 1000 pas



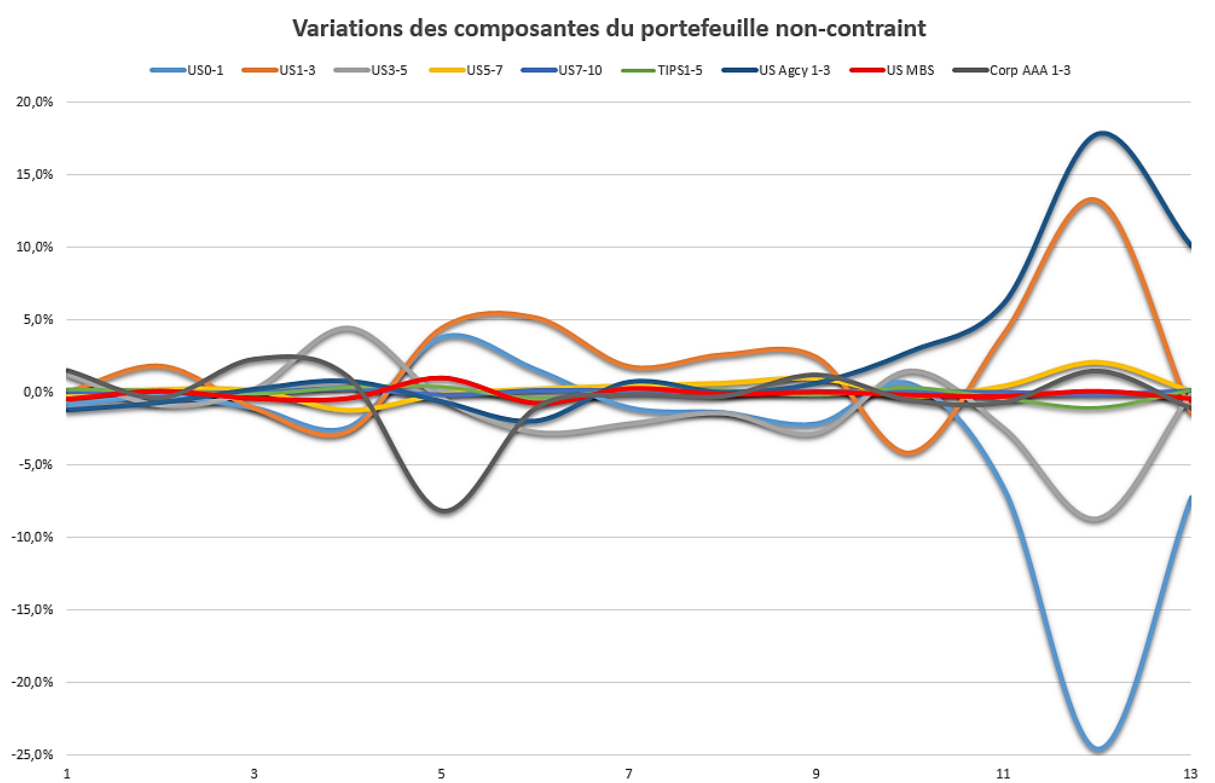
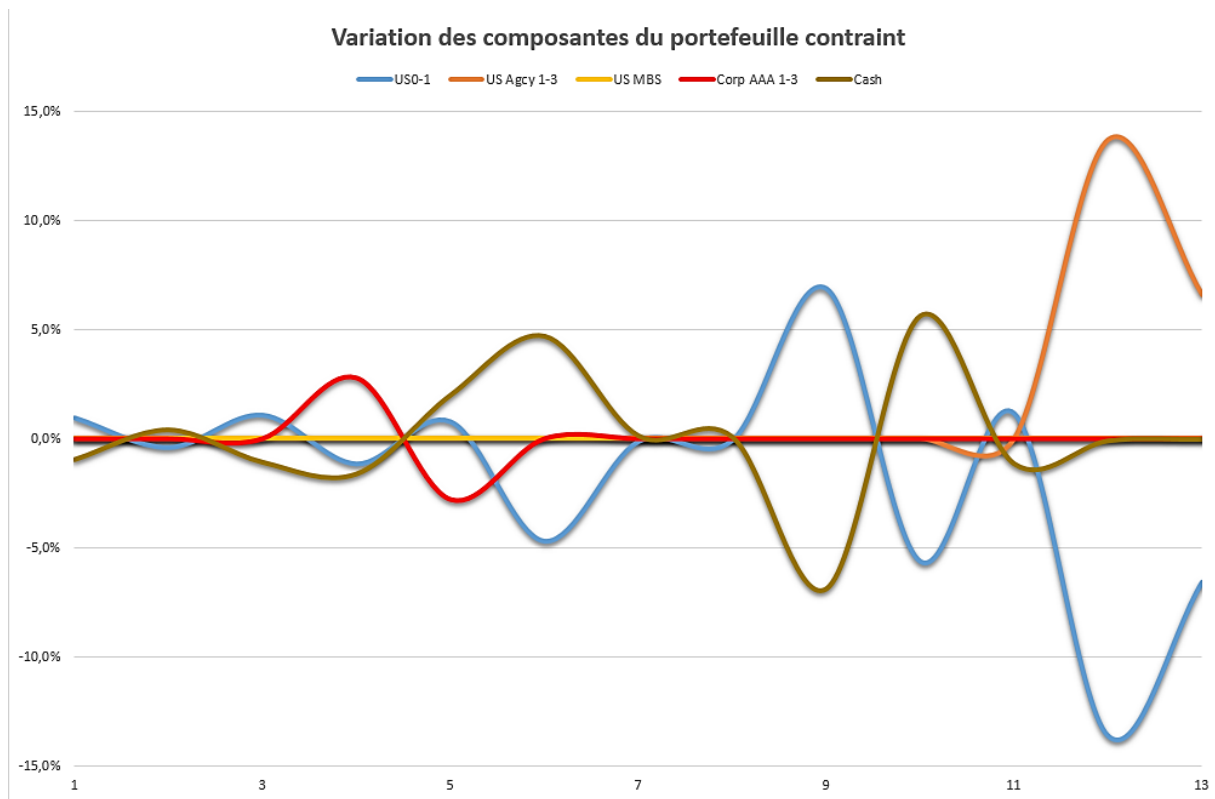
4^{ème} étape : retour à la distribution spécifiée



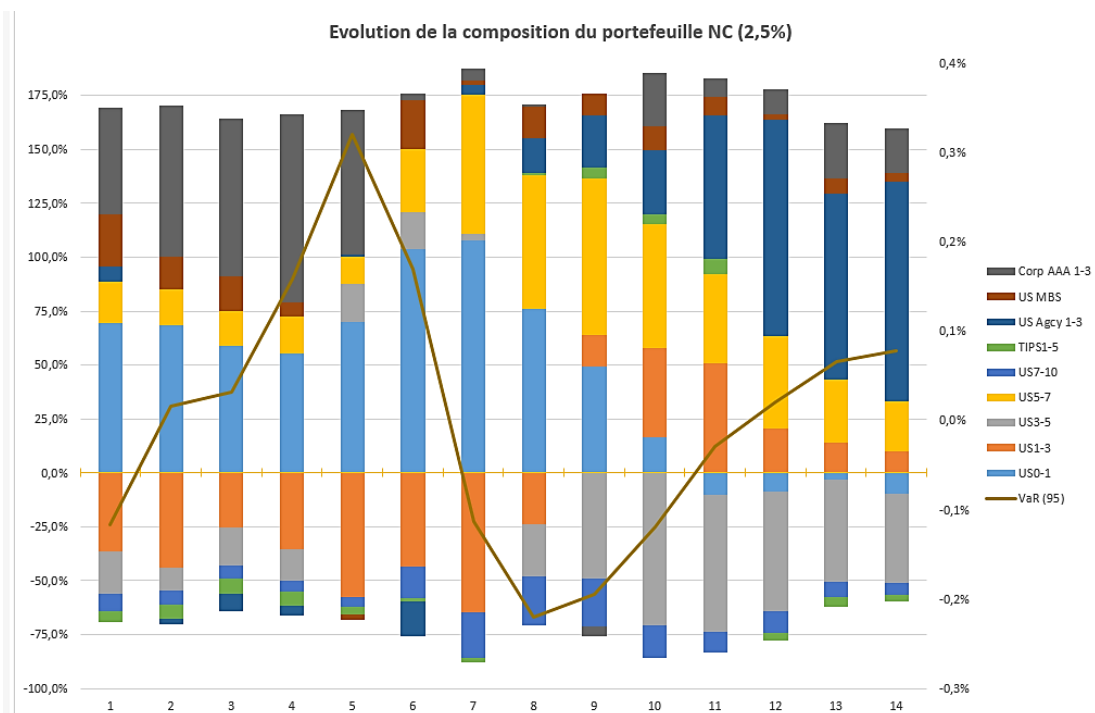
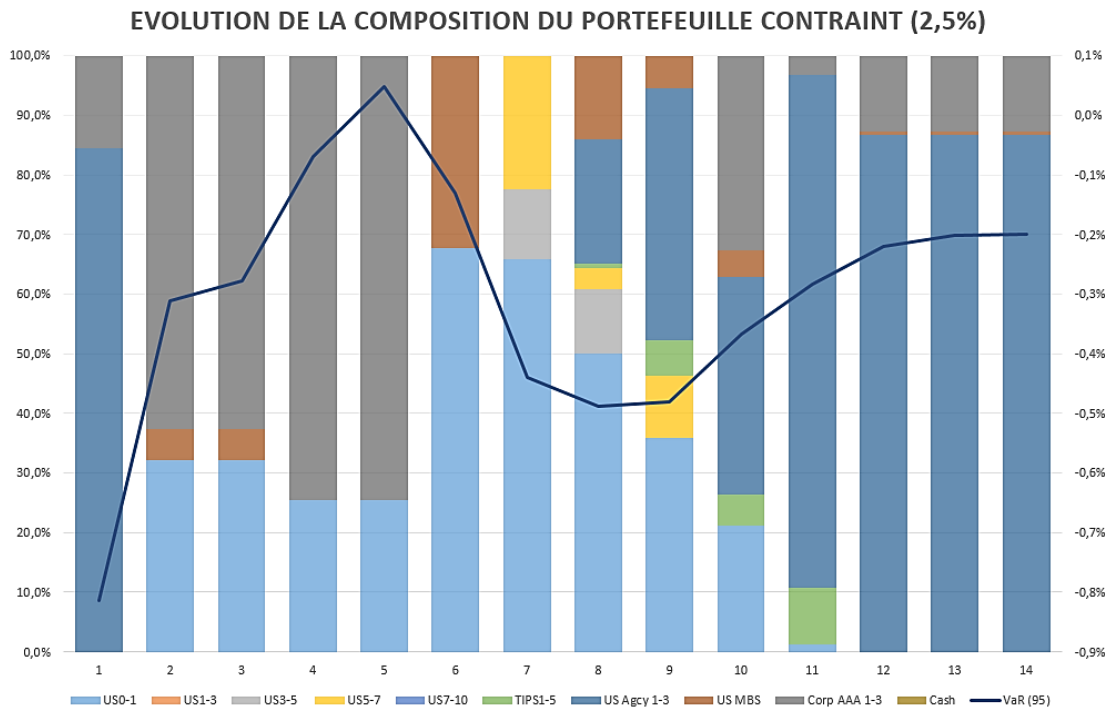
5^{ème} étape : visualisation de la densité de probabilité



Variations des compositions des portefeuilles à variance minimale :



Evolution des compositions des portefeuilles (3) à rendement 2,5% :



Annexes : évolution des variations du portefeuille 1 et présentation du portefeuille 3

Variations des compositions des portefeuilles 3 à rendement 2,5% :

